

Από τον Λογισμό των Μεταβολών στην Θεωρία του Βέλτιστου Ελέγχου

Επικ. Καθηγητής Νικόλαος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Θεσσαλονίκη 54006
email : karampet@math.auth.gr

Περίληψη. Η ιστορία της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου έχει τις ρίζες της, στην ανάπτυξη ενός σημαντικού κλάδου των Μαθηματικών, του Λογισμού των Μεταβολών. Στην εργασία αυτή θα κάνουμε μια αναφορά στο ιστορικό της γέννησης του σημαντικού αυτού κλάδου των Μαθηματικών, ενώ στην συνέχεια θα αναφερθούμε στον βασικό στόχο της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου.

Abstract. *Optimal Control Theory* has its roots in the development of a major field of Mathematics: the *Calculus of Variations*. The main scope of this work is twofold: a) to trace the development of the calculus of variations, and b) to refer to the primary target of the optimal control theory.

1.1 Ιστορία του Λογισμού των Μεταβολών

Πριν από πολλά χρόνια οι βασιλιάδες αντάμειβαν τους υπαλλήλους τους και την προσωπική τους φρουρά δίνοντας τους όλη την γη που μπορούσαν να περικλείσουν με ένα αυλάκι που θα όργωναν σε συγκεκριμένο χρόνο. Έτσι γεννήθηκε το *ισοπεριμετρικό πρόβλημα*, η εύρεση δηλαδή της καμπύλης δεδομένου μήκους που περικλείει την μεγαλύτερη επιφάνεια.

Ο Βιργίλιος (70-19 π.χ.) στην *Αινειάδα* αναφέρεται σε ένα πρόβλημα, το οποίο η παράδοση το τοποθετεί στον 9^ο π.Χ. αιώνα, γνωστό ως *πρόβλημα της Διδούς*, και το οποίο σήμερα στα Μαθηματικά αναφέρεται ως *ισοπεριμετρικό πρόβλημα*. Ποιο συγκεκριμένα όταν η πριγκίπισσα Διδώ της Φοινίκης, καταδιωκόμενη από τον αδελφό της, κατέπλευσε προς αναζήτηση ασύλου στα παράλια που είναι γνωστά σήμερα ως κόλπος της Τύνιδας, ζήτησε από τον τοπικό ηγεμόνα Ιάρβα, να αγοράσει τόση έκταση

όση μπορούσε να «κυκλώσει με την δωρά ενός ταύρου». Έπειτα από συμφωνία με τον τοπικό ηγεμόνα, η Διδώ τεμάχισε την δωρά του ταύρου σε λεπτές λωρίδες, τις έδωσε τη μια μετά την άλλη και κύκλωσε μια μεγάλη έκταση γης, όπου έκτισε ένα φρούριο και, κοντά του, την πόλη της Καρχηδόνας. Η λέξη κύκλωσε (circumdare), που αναφέρει ο Βιργίλιος, εμπεριέχει τη λέξη κύκλος (circus), που σημαίνει ότι η Διδώ κατόρθωσε να λύσει σωστά το πρόβλημα αυτό.



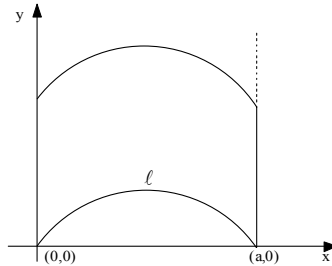
Χειρόγραφο της «Αινειάδας» (Βιβλίο 1) με εικονογράφηση του θανάτου της Διδώς (βιβλιοθήκη Βατικανού, Cod. Vat. lat. 3225).

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής :

«Να προσδιοριστεί το βέλτιστο σχήμα ενός τεμαχίου γης το οποίο, για δεδομένο μήκος ℓ της περιμέτρου του, πρέπει να έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.»

ή αν υποθέσουμε ότι η Διδώ επιθυμούσε πρόσβαση στην θάλασσα :

«Μεταξύ όλων των τόξων με μήκος ℓ τα οποία περιέχονται στην ημιλωρίδα $0 \leq x \leq a$, $y \geq 0$ και έχουν καθορισμένα άκρα $(0,0)$ και $(a,0)$ να βρεθεί ένα τόξο το οποίο, μαζί με το τμήμα $y = 0, 0 \leq x \leq a$ να περικλείει ένα χωρίο με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.»



Το παραπάνω πρόβλημα συνεπώς ανάγεται στην εύρεση του μέγιστου της παρακάτω ποσότητας :

$$J(y(x)) = \int_0^a y(x) dx$$

υπό τον περιορισμό

$$L(y(x)) = \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \ell$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι γνωστό από τους αρχαίους Έλληνες ότι έχει ως λύση τον κύκλο, παρόλο που έπρεπε να έρθει ο 19^{ος} αιώνας για να αποδειχθεί με σύγχρονες τεχνικές. Η $J(y(x))$ που δεν είναι τίποτα άλλο από ένας κανόνας αντιστοίχισης από ένα σύνολο συναρτήσεων κλάσης $C^1[a,b]$ (συνεχών συναρτήσεων με παραγώγους συνεχείς) στο \mathbb{R} ονομάζεται *συναρτησιακό*.

Ο Πάππος από την Αλεξάνδρεια (290-350μ.Χ.) ασχολήθηκε με το ισοπεριμετρικό πρόβλημα. Η κυριότερη εργασία του στη Γεωμετρία είναι η *Συναγωγή*, μία συλλογή μαθηματικών συγγραμμάτων σε οκτώ βιβλία. Στην εργασία του αυτή συγκεντρώνει και συστηματοποιεί τα αποτελέσματα της εργασίας άλλων γνωστών συγγραφέων όπως του Απολλωνίου, Ευκλείδη (365π.Χ. -300π.Χ., *Στοιχεία Ευκλείδη* (13^ο βιβλίο)), Αρχιμήδη (287π.Χ.-212π.Χ. *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου*, *Κύκλου Μέτρησις*) Ζηνόδωρου (200π.Χ.-140π.Χ., *Περί Ισομερών Σχημάτων*), Ερατοσθένη, Αρίσταρχου, Υψικλή (180 π.Χ.- 120π.Χ., *Στοιχεία Υψικλή* (14^ο βιβλίο)), Θεοδώσιου (160π.Χ. -90π.Χ., *Σφαιρικά*) κ.λ.π.

Στο 5^ο βιβλίο της Μαθηματικής του συλλογής ο Πάππος συγκρίνει σχήματα με ίσα μήκη (ή επιφάνειες) για να δει ποιο από αυτά περικλείει την μεγαλύτερη επιφάνεια (ή χώρο). Τα προβλήματα αυτά είναι γνωστά και ως ισοπεριμετρικά προβλήματα και τα οποία προφανώς είχε μελετήσει ο Ζηνόδωρος στην πραγματεία του «*Περί Ισομερών Σχημάτων*» γύρω στο

180π.X. (περίπου μισή χιλιετία νωρίτερα) αλλά και ο Αρχιμήδης. Τα βασικά συμπεράσματα του 5^{ου} βιβλίου είναι τα παρακάτω :

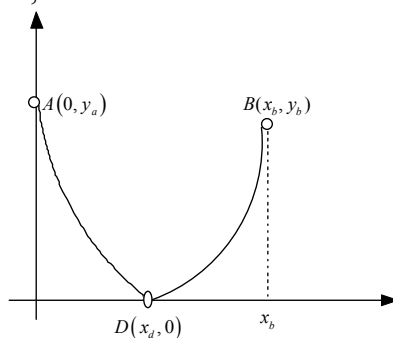
1. Μεταξύ επιπέδων σχημάτων με την ίδια περίμετρο, ο κύκλος περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδόν.
2. Μεταξύ στερεών σχημάτων με το ίδιο εμβαδόν, η σφαίρα έχει τον μεγαλύτερο όγκο.
3. Υπάρχουν πέντε και μόνο πέντε κανονικά στερεά.

Δευτερεύοντα συμπεράσματα που χρειάστηκαν ήταν τα παρακάτω :

4. Μεταξύ ισοπεριμετρικών πολυγώνων με τον ίδιο αριθμό πλευρών, ένα κανονικό πολύγωνο είναι μεγαλύτερο από ένα ακανόνιστο.
5. Δοθέντων δύο κανονικών επιπέδων πολυγώνων με την ίδια περίμετρο, εκείνο με τον μεγαλύτερο αριθμό γωνιών έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.
6. Δοθέντων ενός κανονικού πολυγώνου και ενός κύκλου με την ίδια περίμετρο, ο κύκλος έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.
7. Δοθέντων οιονδήποτε τμημάτων κύκλου με την ίδια περιφέρεια, το ημικύκλιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.
8. Δεδομένης μιας σφαίρας και ενός από τα πέντε κανονικά στερεά με ίσες επιφάνειες, η σφαίρα είναι μεγαλύτερη.
9. Από τα στερεά σώματα με την ίδια επιφάνεια, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει περισσότερες έδρες.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε σοβαρά με προβλήματα βελτιστοποίησης ήταν ο Ήρων από την Αλεξάνδρεια (έζησε μεταξύ 150 μ. Χ. και 300 μ.Χ.). Ο Ήρων στο βιβλίο του με τίτλο *Κατοπτρικά* έδειξε ότι όταν το φως αντανακλάται από έναν καθρέφτη, η διαδρομή που ακολουθεί από το αντικείμενο ως τα μάτια του παρατηρητή είναι η *συντομότερη* δυνατή από οποιαδήποτε άλλη διαδρομή και η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με την γωνία ανάκλασης. Επειδή το μέσο στο οποίο διαδίδεται το φως κατά τον Ήρων είναι ένα, η έννοια του συντομότερου είναι ταυτόσημη με την έννοια του *γρηγορότερου*. Η μελέτη της μετάδοσης του φωτός μέσα από διαφορετικά μέσα και η διατύπωση ότι το φως ακολουθεί την *γρηγορότερη* διαδρομή (που δεν είναι κατά ανάγκη και η συντομότερη από άποψη απόστασης) διατυπώθηκε αργότερα από τον Fermat (1601-1655). Η λύση μάλιστα που πρότεινε ο Fermat έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην επίλυση του βραχυστόχρονου προβλήματος που θα δούμε παρακάτω από τον Bernoulli.

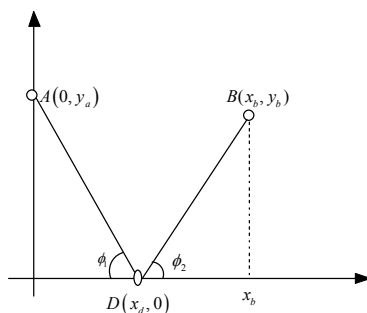
Το πρόβλημα του Ήρων μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά και ως εξής :
 «Στο επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(0, y_a)$ και $B(x_b, y_b)$ που κείνται προς
 το ίδιο μέρος μαζί με το τμήμα $y(x) = 0, 0 \leq x \leq x_b$. Να βρεθεί σημείο
 $D(x_d, 0)$ καθώς και διαδρομή ADB η οποία να είναι η ελάχιστη δυνατή
 που συνδέει τα σημεία A, B .»



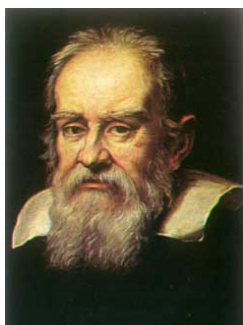
Το παραπάνω πρόβλημα συνεπώς ανάγεται στην εύρεση του μέγιστου του παρακάτω συναρτησιακού:

$$J(y(x)) = \int_0^{x_b} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

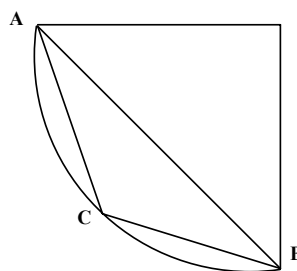
με τις προϋποθέσεις $y(0) = y_a, y(x_d) = 0, y(x_b) = y_b$ καθώς και την υπόθεση ότι η παράγωγος της $y(x)$ πιθανώς να μην είναι συνεχής στο σημείο $x = x_d$. Όπως θα δούμε παρακάτω και όπως έδειξε και ο Ήρωνας η συντομότερη διαδρομή είναι τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία A, D και τα σημεία D, B , ενώ το σημείο D είναι τέτοιο ώστε η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με την γωνία ανάκλασης $\sin(\phi_1) = \sin(\phi_2)$.



Ο Galileo Galilei (1564-1642) το 1638 στο τελευταίο του βιβλίο «*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze*» (Ομιλίες και μαθηματικές επιδείξεις σχετικά με δύο νέες επιστήμες) μελέτησε 2 προβλήματα που σχετίζονται με το λογισμό των μεταβολών. Το πρώτο πρόβλημα έχει σχέση με το βραχυστόχρονο πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα διαπίστωσε ότι ο χρόνος που θα κάνει ένα σώμα για να κινηθεί από το σημείο A στο σημείο B λόγω της βαρύτητας του θα είναι μικρότερος αν ακολουθήσει δύο διαδοχικές χορδές (AC και CB) ενός κύκλου που συνδέει τα σημεία A και B από ότι μια ευθεία που ενώνει τα δύο αυτά σημεία. Γενίκευσε στη συνέχεια το αποτέλεσμα αυτό αναφέροντας ότι η κίνηση σε κυκλικό τόξο είναι πιο σύντομη από την αντίστοιχη χορδή που ενώνει τα άκρα του τόξου. Στην χορδή όμως AB αντιστοιχούν παραπάνω από ένα τόξα, τα οποία ο Galileo θεώρησε ότι η κίνηση σε αυτά διαρκεί ίσα χρονικά διαστήματα, κάτι το οποίο ισχύει μόνο προσεγγιστικά. Μάλιστα κάποιοι συγγραφείς αναφέρουν ότι ο Galileo θεώρησε το κυκλικό τόξο ως την λύση του βραχυστόχρονου προβλήματος, κάτι το οποίο δεν ισχύει.

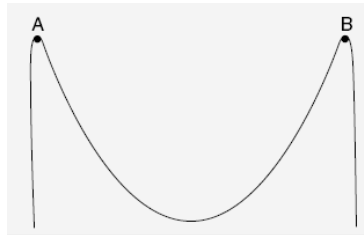


Galileo Galilei (1564-1642)



Το δεύτερο πρόβλημα που εξέτασε ο Galileo ήταν το πρόβλημα εύρεσης της καμπύλης που θα πρέπει να έχει μια αλυσίδα που κρέμεται από δύο σημεία. Η ζητούμενη καμπύλη σύμφωνα με τον Galileo θα πρέπει να είναι *παραβολή*. Το 1669 ο J. Jungius (1587-1657), απέδειξε ότι η παραβολή δεν ταυτίζεται με την αλυσοειδή καμπύλη. Ένα χρόνο μετά από την δημοσίευση του προβλήματος από τον Jacob Bernoulli το 1690, τρεις λύσεις δημοσιεύονται τον Ιούνιο του 1691 στο περιοδικό “*Acta eruditorum*”, από τους Huygens (1629-1695), Leibniz και Johann Bernoulli (τον αδελφό του Jacob). Η καμπύλη που αποτελεί λύση στο πρόβλημα αυτό είναι η *αλυσοειδής καμπύλη* (*catenary* που βγαίνει από την λατινική λέξη της «αλυσίδα») (είναι η $y(x) = (e^{ax} + e^{-ax}) / (2a)$ όπου το a εξαρτάται από την

θέση των δύο σημείων που κρέμεται η αλυσίδα καθώς και από τα μήκος της αλλά όχι από την μάζα της). Ο Huygens είναι ο πρώτος που χρησιμοποιεί το όνομα της αλυσοειδούς καμπύλης (catenary) σε γράμμα του προς τον Leibniz το 1690.

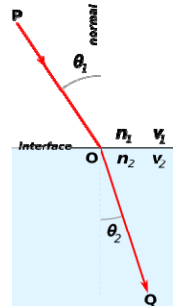


Η αλυσοειδής καμπύλη δημιουργείτε κρατώντας μια αλυσίδα από δύο σημεία A και B.

Οι αρχές όμως του Λογισμού των Μεταβολών ξεκινούν με την διατύπωση της αρχής από τον Pierre de Fermat (1601-1665), ότι το φως ταξιδεύει διαμέσου μιας ακολουθίας οπτικών μέσων στον ελάχιστο δυνατό χρόνο (1662). Στηριζόμενος στα αποτελέσματα αυτά ο Fermat αναφέρει ότι «*Η φύση ακολουθεί πάντα τον ευκολότερο και γρηγορότερο δρόμο και όχι κατ' ανάγκη τον συντομότερο*». Αναφέρει μάλιστα ως παράδειγμα και την δουλειά του Gallileo. Ως συνέπεια αυτού ο Fermat αποδεικνύει τον νόμο διάθλασης του Snell (1580-1626μ.Χ.) (δες σχήμα παρακάτω). Ο νόμος αυτός αρχικά περιγράφηκε από τον Άραβα μαθηματικό Ibn Sahl (940-1000μ.Χ) σε ένα χειρόγραφο το 984μ.Χ.. Στη συνέχεια ανακαλύφθηκε από τον Thomas Harriot (1560-1621), και έπειτα ανεξάρτητα από τον Willebrord von Roijen Snel (1580-1626) χωρίς να το δημοσιεύσει. Ο Descartes ο οποίος ήξερε τον Snell πολύ καλά ήταν ο πρώτος που τον δημοσίευσε. Ενώ όμως περίγραψε σωστά το νόμο ημιτόνου, δεν απέδωσε σωστά την απόδειξη. Ο Huygens αργότερα το 1703, υποστηρίζοντας τις αρχές του Fermat, διατύπωσε τον νόμο της διάθλασης θεωρώντας ότι το φως διαδίδεται ως κύμα.



Pierre de Fermat (1601-1665)



Ο νόμος της διάθλασης $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$ από ένα μέσο με δείκτη διάθλασης n_1 σε ένα μέσο με δείκτη διάθλασης n_2 .

Η διατύπωση του νόμου του Fermat έχει ως εξής : Αν μια ακτίνα φωτός περνάει από n διαφορετικά μέσα, διανύοντας απόσταση l_i με ταχύτητα v_i

στο καθένα, τότε ο συνολικός χρόνος που θα κάνει θα είναι $t = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{v_i}$. Αν

καλέσουμε τον λόγο της ταχύτητας του φωτός στο κενό c με την ταχύτητα του φωτός στο μέσο i v_i , δηλ. $n_i = c/v_i$ (δείκτης διάθλασης), τότε ο

συνολικός χρόνος ξαναγράφεται ως $t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n n_i l_i$. Συνεπώς αν ένα μονοπάτι

ελαχιστοποιεί τον χρόνο t θα ελαχιστοποιεί και το άθροισμα $S = \sum_{i=1}^n n_i l_i$. Αν

ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται συνεχώς στο μονοπάτι τότε το άθροισμα

μπορεί να αντικατασταθεί από το ολοκλήρωμα $S = \int_{\gamma} d\eta$ όπου γ είναι το

μονοπάτι που ακολουθεί το φως. Συνεπώς προκειμένου να έχουμε τον ελάχιστο δυνατό χρόνο ως αναγκαία συνθήκη η μεταβολή του

ολοκληρώματος θα πρέπει να είναι μηδενική π.χ. $\delta \int_{\gamma} d\eta = 0$. Ο νόμος αυτός

είναι πιο γενικός από τον νόμο του Snell επειδή περιλαμβάνει και τον νόμο διάθλασης αλλά και τον νόμο ανάκλασης.

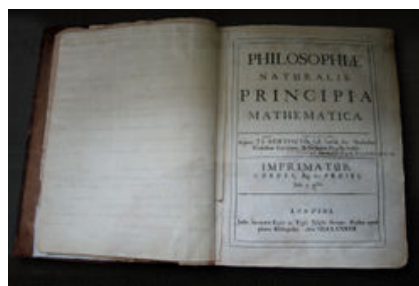
Αργότερα το 1685 ο Newton (1643-1727) στην περίφημη εργασία του στην μηχανική *Philosophiae naturalis principia mathematica* (ή αλλιώς Principia για συντομία), μελετά την μορφή που θα πρέπει να έχει ένα σώμα ώστε να έχει την ελάχιστη αντίσταση κατά την κίνηση του με σταθερή ταχύτητα μέσα σε ένα υγρό. Αυτό ήταν το πρώτο πρόβλημα που διατυπώθηκε και λύθηκε σωστά, σημειώνοντας την γέννηση της θεωρίας του λογισμού των μεταβολών. Ο Newton δεν δημοσίευσε την εργασία αυτή παρά μόνο το 1694. Παρ' όλη την σπουδαιότητα του και την δυσκολία επίλυσης του, το πρόβλημα αυτό δεν έτυχε της αντίστοιχης προσοχής. Το πρόβλημα αυτό θεωρείτε πολύ σημαντικό διότι : α) η γεωμετρική τεχνική απόδειξης του παραπάνω προβλήματος σε συνδυασμό με τις ιδέες του Fermat χρησιμοποιήθηκαν αργότερα από τον ίδιο τον Newton αλλά και τον Jacob Bernoulli στην λύση του βραχυστόχρονου προβλήματος και αργότερα από τον Euler και β) διότι μπορεί να έχει ως λύση καμπύλη η οποία περιέχει γωνίες (μη συνεχείς παραγώγους) ενώ μπορεί να μην οδηγεί σε λύση αν το πρόβλημα διατυπωθεί παραμετρικά. Ο Newton πρώτα ασχολήθηκε με τις διαστάσεις που θα πρέπει να έχει ένας κόλινος κώνος, ώστε να έχει την ελάχιστη αντίσταση κατά την κίνηση του σε αραιό μέσο, αν δίνονται η βάση και το ύψος του. Στη συνέχεια μελέτησε το πρόβλημα στην πιο γενική του μορφή. Η συνολική αντίσταση που δέχεται το στερεό σώμα και η οποία θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί δίνεται από την παράσταση

$$F = 2K \int_0^R \frac{x dx}{1 + f'(x)^2}, K = 2\pi r u^2$$

όπου $f(x)$ είναι η ζητούμενη συνάρτηση.



Isaac Newton (1643-1727)



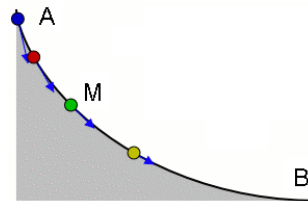
Το βιβλίο του Newton "Principia"

Το 1659 ο Christiaan Huygens (1629-1695) δίνει στο *Horologium oscillatorium* γεωμετρικά την λύση στο παρακάτω πρόβλημα, το οποίο είναι γνωστό ως *ταυτόχρονο πρόβλημα* :

«Δοσμένων των σημείων A και B σε ένα κάθετο επίπεδο, να υπολογιστεί η καμπύλη η οποία έχει την ιδιότητα, κάθε σημείο M που κινείται στην διαδρομή AMB υπό την επίδραση του βάρους του και χωρίς τριβές, να φτάνει στο κατώτατο σημείο B στον ίδιο πάντα χρόνο.»



Christiaan Huygens (1629-1695)

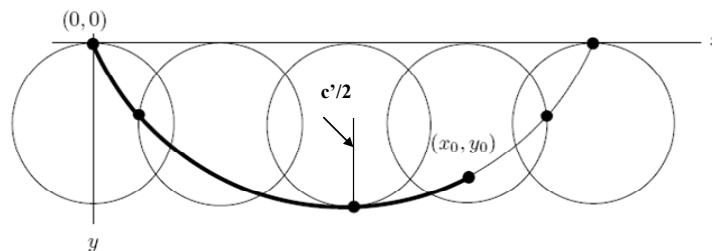


Ταυτόχρονο πρόβλημα : Τέσσερα σημεία που ξεκινούν από διαφορετικά σημεία της καμπύλης θα πρέπει να φτάσουν στο κατώτατο σημείο της καμπύλης στον ίδιο χρόνο.

Η λύση στο παραπάνω πρόβλημα είναι η *κυκλοειδής καμπύλη* (cycloid-ονομάστηκε έτσι από τον Galileo το 1599) της οποίας η παραμετρική μορφή δίνεται από τον τύπο :

$$x(t) = r(t - \sin(t)), y(t) = r(1 - \cos(t))$$

και η οποία δημιουργείται από την διαδρομή ενός σημείου κύκλου ακτίνας r καθώς κυλάει σε μια ευθεία γραμμή.



Κυκλοειδής καμπύλη

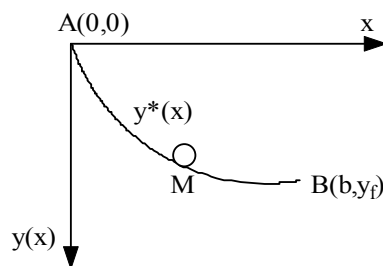
Η λύση του προβλήματος αυτού χρησιμοποιήθηκε αργότερα στον υπολογισμό της λύσης του βραχυστόχρονου προβλήματος. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε αργότερα και από άλλους μεγάλους μαθηματικούς όπως ο Jacob Bernoulli (το 1690 στο *Acta Eruditorum*), τον Joseph Louis Lagrange και τον Leonhard Euler.

Τον Ιούνιο του 1696, στο περιοδικό *Acta Eruditorum*, ο Johann Bernoulli (1667-1748) διατυπώνει το παρακάτω ανοικτό πρόβλημα :

«Δοσμένων των σημείων A και B σε ένα κάθετο επίπεδο, να υπολογιστεί η καμπύλη που πρέπει να διαγράψει ένα σημείο M που κινείται στην διαδρομή AMB υπό την επίδραση του βάρους του, έτσι ώστε ξεκινώντας από το A, να φτάσει στο B στον ελάχιστο χρόνο.»



Johann Bernoulli (1667-1748)



Η καμπύλη $y^*(x) \in C^1$ που ενώνει τα σημεία A, B.

Ο Bernoulli διαβεβαίωσε τους αναγνώστες του περιοδικού ότι η λύση του προβλήματος είναι πολύ χρήσιμη στην Μηχανική και δεν είναι η ευθεία γραμμή αλλά μια πολύ γνωστή ευθεία στους γεωμέτρους. Το πρόβλημα αυτό ονομάστηκε από τον Bernoulli «βραχυστόχρονο πρόβλημα (*brachistochrone problem*)» από την λέξη «βράχυστος (*brachistos*)» που θα πει σύντομος και την λέξη «χρόνος (*chronos*)».

Από την αρχή διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε ότι η κινητική ενέργεια στην θέση B θα είναι ίση με την δυναμική ενέργεια στην θέση A και άρα

$$\frac{1}{2} m u(t)^2 = m g y(x) \Rightarrow u(t) = \sqrt{2 g y(x)} = \frac{ds}{dt}$$

όπου $u(t)$ και m είναι η ταχύτητα και η μάζα του σώματος αντίστοιχα, ενώ $g=9.81$. Εάν T είναι ο χρόνος κατάβασης και s το μήκος της καμπύλης, τότε θα έχουμε :

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{dt}{ds} ds = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2 g y(x)}} \sqrt{1 + (\dot{y}(x))^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2 g}} \int_0^T \frac{(1 + \dot{y}(x)^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}} dx$$

Συνεπώς η μαθηματική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος έχει ως εξής :

Να βρεθεί η καμπύλη $y^*(x) \in C^1$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό :

$$T(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \frac{(1 + \dot{y}(x)^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}} dx$$

Η λύση του παραπάνω προβλήματος είναι η κυκλοειδής καμπύλη (cycloid). Την λύση στο παραπάνω πρόβλημα έδωσαν οι : Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), ο Newton, και ο νεότερος αδερφός του Bernoulli ο Jacob Bernoulli (1654-1705), ενώ υπήρχαν και σχόλια από τους Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651 – 1708) και De L'Hospital (1661-1704).

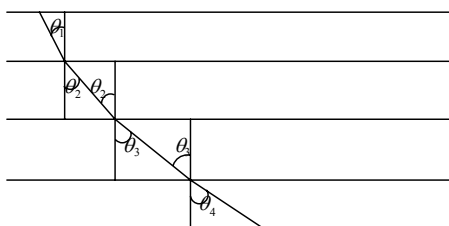


Jacob Bernoulli (1654-1705)

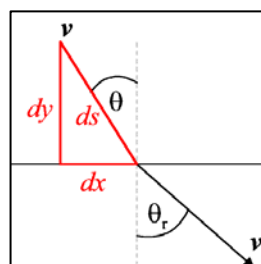


Το μνημείο του βραχυστόχρονου προβλήματος που βρίσκεται στο Groningen όπου ήταν Καθηγητής ο Bernoulli από το 1695 έως το 1705.

Ο Johann Bernoulli στην απόδειξη του, χωρίζει την καμπύλη που θέλουμε να υπολογίσουμε σε ίσα διαστήματα και εφαρμόζει τον νόμο της διάθλασης του Snell (που είχε αποδειχθεί από τον Fermat).



Βασισμένος στην αρχή ελαχίστου χρόνου του Fermat ο Johann Bernoulli έλυσε το βραχυστόχρονο πρόβλημα με την μέθοδο της διακριτοποίησης.



Συνεπώς θα έχουμε στο παραπάνω σχήμα

$$\frac{\sin \theta}{v} = \frac{\sin \theta_r}{v_r}$$

όπου

$$\sin \theta = \frac{dx}{ds}$$

και άρα

$$\frac{1}{v} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{v_r} \frac{dx_r}{ds_r}$$

Συνεπώς η παράσταση $\frac{1}{v_r} \frac{dx_r}{ds_r}$ παραμένει σταθερή σε κάθε επίπεδο και άρα

$$\frac{dx}{ds} = cv$$

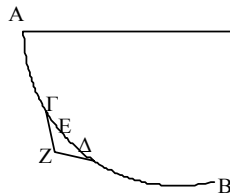
Αν τώρα λάβουμε υπόψιν μας ότι $ds^2 = dx^2 + dy^2$ θα πάρουμε τελικά

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = (cv)^2 \Rightarrow \frac{dx^2}{ds^2} = c^2v^2 \Rightarrow \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = c^2v^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = c^2v^2 \stackrel{v=\sqrt{2gy}}{\Rightarrow} \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2c^2gy \Rightarrow y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = k^2, k = \frac{1}{c\sqrt{2g}}$$

Η επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης μας δίνει την κυκλοειδή καμπύλη ως λύση.

Από την άλλη πλευρά η λύση που έθεσε ο Jacob Bernoulli περιείχε ιδέες που εφαρμόστηκαν αργότερα στον λογισμό των μεταβολών. Θεώρησε την ζητούμενη καμπύλη AB και τρία σημεία πάνω στην καμπύλη Γ, Δ και Ε τα οποία είναι σε πάρα πολύ κοντινή απόσταση, καθώς και μια μικρή μεταβολή της καμπύλης η οποία περνάει από το σημείο Ζ.



Στη συνέχεια θεώρησε : α) ότι λόγω του ότι η καμπύλη ΓΕΔ είναι ελαχίστου χρόνου, και η ΓΖΔ η οποία βρίσκεται πολύ κοντά θα κάνει τον ίδιο περίπου χρόνο, καθώς και β) ότι $ds/dt \sim \sqrt{y}$. Βάση αυτών των συνθηκών κατέληξε στο ίδιο συμπέρασμα με τους υπόλοιπους. Οι ιδέες του Jacob υιοθετήθηκαν αργότερα από τους Brook Taylor (1715) και Johann Bernoulli.

Ο Leonhard Euler (1707-1783) που ήταν μαθητής του Johann Bernoulli, στο σημαντικό του έργο το 1744, «*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti*», πήρε τις μεθόδους επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων όπως το παραπάνω και τις συστηματοποίησε σε μια συγκεκριμένη μέθοδο. Με την μέθοδο αυτή επίλυσε μια πολύ γενική κλάση προβλημάτων στην οποία αναζητούμε ακρότατα συναρτησιακών της μορφής

$$J(y(x)) := \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

Οι αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη λύσης του παραπάνω συναρτησιακού ορίζονται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(1)}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(2)}} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0$$

η οποία είναι γνωστή και ως διαφορική εξίσωση Euler-Poisson και είναι τάξης $2n$. Να σημειωθεί εδώ ότι ο Euler θεωρούσε ότι οι προτεινόμενες συνθήκες είναι αναγκαίες και ικανές και πίστευε ότι το είδος του ακροτάτου μπορούσε να προσδιορισθεί από την τιμή του συναρτησιακού για την βέλτιστη λύση που θα βγει από τις δ.ε. Euler. Διατύπωσε επίσης ότι οι προτεινόμενες αναγκαίες συνθήκες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμό του συστήματος συντεταγμένων όπως για παράδειγμα τις πολικές συντεταγμένες. Ο Euler επίσης μελέτησε ακρότατα συναρτησιακών της μορφής

$$J := \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x), Q) dx$$

που υπόκεινται σε περιορισμούς της μορφής

$$\frac{dQ}{dx} = L(x, y(x), y^{(1)}(x))$$

δίνοντας έτσι πρώτος αναγκαίες συνθήκες για προβλήματα του τύπου Lagrange. Στο παραπάνω βιβλίο ο Euler μελέτησε και ισοπεριμετρικά προβλήματα, προβλήματα δηλαδή στα οποία η επιτρεπτή λύση ικανοποιεί επιπλέον ένα πεπερασμένο σύνολο συνθηκών όπως για παράδειγμα η ισοπεριμετρική συνθήκη. Ο Euler στο 2^ο Παράρτημα του βιβλίου του που αναφέραμε παραπάνω το οποίο είχε τίτλο «On the motion of bodies in a non-resisting medium, determined by the method of maxima and minima», διατυπώνει πρώτος το αξίωμα της ελάχιστης δράσης, σε ένα πρόβλημα κίνησης ενός σώματος στο επίπεδο, παρόλο που η αρχή αυτή αποδίδεται στον Maupertuis. Η αρχή αυτή επεξεργάστηκε αργότερα από τους Lagrange, Poisson και Jacobi, αλλά και με μια διαφορετική προσέγγιση από τον Hamilton ο οποίος έθεσε το πρόβλημα σε μια πιο γενική μορφή.

Ο Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) ήρθε αργότερα να δείξει στον Euler με ποιο τρόπο θα μπορούσε να απαλλαγεί από την χρήση των γεωμετρικών μεθόδων στις αποδείξεις του, κάνοντας χρήση συναρτήσεων σύγκρισης. Ο Euler ακολούθησε τις μεθόδους του Lagrange, βγάζοντας όλες τις γεωμετρικές μεθόδους από τις αποδείξεις του και ονόμασε το νέο αυτό ερευνητικό πεδίο με το όνομα που χρησιμοποιούμε σήμερα «*Λογισμός των Μεταβολών*» προς τιμή των μεθόδων μεταβολής που χρησιμοποίησε ο Lagrange. Ο Lagrange πέρα του ότι απέδειξε με διαφορετικό τρόπο τις αναγκαίες συνθήκες που έδωσε ο Euler, μελέτησε συναρτησιακά με παραπάνω από μια συναρτήσεις καθώς και προβλήματα στα οποία οι αρχικές και οι τελικές συνθήκες της βέλτιστης καμπύλης που ψάχνουμε δεν είναι γνωστές. Στο βιβλίο του *Mecanique Analytique* δείχνει με ποιον τρόπο μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα των πολλαπλασιαστών στην γενική περίπτωση και με ποιον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τους πολλαπλασιαστές αυτούς πρδ. θεωρεί το συναρτησιακό :

$$J := \int_a^b F(x, y(x), z(x), \dots, y^{(1)}(x), z^{(1)}(x), \dots) dx$$

του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το ακρότατο όταν γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $y(x), z(x), \dots$ πρέπει να ικανοποιούν τον/ους περιορισμό/ους

$$\Phi_i(x, y(x), z(x), \dots, y^{(1)}(x), z^{(1)}(x), \dots) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Για τον υπολογισμό του ακρότατου θα πάρει στην θέση της συνάρτησης F την συνάρτηση

$$F_a := F + l_1(x)\Phi_1 + l_2(x)\Phi_2 + \dots + l_m(x)\Phi_m$$

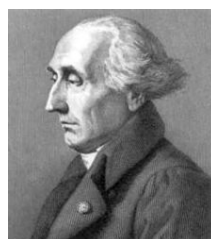
και θα εφαρμόσει τις αναγκαίες συνθήκες που είχε προτείνει για την περίπτωση μη ύπαρξης περιορισμών. Ο Lagrange θα μελετήσει επίσης την περίπτωση που οι τελικές συνθήκες των συναρτήσεων $y(x), z(x), \dots$ δεν είναι γνωστές αλλά ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες. Τέλος θα επιλύσει το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, όπου οι συνθήκες είναι της μορφής :

$$\int_a^b \Phi_i(x, y(x), z(x), \dots, y^{(1)}(x), z^{(1)}(x), \dots) dx = c_i, i = 1, 2, \dots, m$$

Τον κανόνα των πολλαπλασιαστών θα αποδείξει αργότερα ο Mayer. Η απόδειξη του ο Lagrange είχε ένα μικρό ψεγάδι όσον αφορά την υπόθεση ότι οι μεταβολές $\delta x(t), \delta y(t), \dots$ μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες και αυθαίρετες.



Leonhard Euler(1707-1783)



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Το 1786, ο Adrien-Marie Legendre (1752-1833) προσπάθησε να διατυπώσει συνθήκες μέσω της δεύτερης μεταβολής του συναρτησιακού που να ελέγχουν αν το ακρότατο ενός συναρτησιακού δίνει ελάχιστη ή μέγιστη τιμή στο συναρτησιακό (σε αντιστοιχία με το κριτήριο της παραγώγου δεύτερης τάξης για τον έλεγχο του ακροτάτου σε συναρτήσεις). Η απόπειρα αυτή του Legendre δεν στέφθηκε με επιτυχία. Ο Lagrange διατύπωσε πολλές αντιρρήσεις στην μέθοδο αυτή, κάποιες από τις οποίες δημοσιεύθηκαν στο *Theories des fonctions analytiques* το 1797.

Ότι δεν κατάφερε ο Legendre, το ολοκλήρωσε ο Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) το 1836 (50 χρόνια αργότερα), ο οποίος διατύπωσε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης ακροτάτου σε ένα συναρτησιακό. Η εργασία του πάνω στις ικανές συνθήκες δεν είχε αποδείξεις, παρά μόνο ελάχιστες υποδείξεις. Την ίδια εποχή ο William Rowan Hamilton (1805-1865) διατυπώνει την αρχή ελάχιστης δράσης σε μηχανικά συστήματα, σύμφωνα με την οποία η χρονική εξέλιξη ενός μηχανικού σώματος γίνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα της διαφοράς μεταξύ κινητικής και

δυναμικής ενέργειας να είναι στάσιμο. Η αρχή αυτή περιλάμβανε δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ο Jacobi δείχνει το 1838, ότι οι εξισώσεις που πρότεινε ο Hamilton έχουν λύση και ότι μόνο μια από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις χρειάζεται και έτσι δημιουργείται η περίφημη Hamilton-Jacobi εξίσωση η οποία αποτέλεσε την βάση του Δυναμικού Προγραμματισμού που ανακαλύφθηκε από τον Richard Ernest Bellman (1920-1984) 100 χρόνια αργότερα (το 1953).



Adrien-Marie Legendre (1752-1833)



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Σημαντικά βήματα στην εξέλιξη του λογισμού μεταβολών γίνονται από τον Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) και αργότερα από τους Oskar Bolza (1857-1942), Gilbert A. Bliss (1876-1951), Κωνσταντίνο Καραθεοδωρή (1873-1950) και McShane (1904-1989).

Ο Λογισμός των Μεταβολών, βρήκε πολλές εφαρμογές όπως για παράδειγμα στην *Θεωρία Morse* (Marston Morse (1892-1977)), στην *Θεωρία Ελαχίστων Επιφανειών* (2 μετάλλια Field δόθηκαν στην περιοχή αυτή στους Jesse Douglas το 1936 και Enrico Bombieri αντίστοιχα), στην *Φυσική* (πέραν της αρχής ελάχιστης δράσης του Hamilton, ο λογισμός μεταβολών χρησιμοποιήθηκε στην κβαντική μηχανική από τον Richard Feynman (1918-1988)), αλλά και στην *Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου*.

2 Εισαγωγή στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα του λογισμού μεταβολών είναι το εξής : Δεδομένου ενός συναρτησιακού J και ενός καλώς ορισμένου συνόλου συναρτήσεων A , να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις του A που ελαχιστοποιούν (ή μεγιστοποιούν) το J . Έστω για παράδειγμα το διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και ας ορίσουμε με $C^1_{[a,b]}$ το σύνολο των συναρτήσεων που

έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο στον χώρο των συναρτήσεων $y(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω επίσης

$$J(y(x)) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

με πεδίο ορισμού το $C_{[a,b]}^1$. Στόχος του λογισμού μεταβολών είναι λοιπόν να υπολογίσει την συνάρτηση $y(x)$ που ελαχιστοποιεί (ή μεγιστοποιεί) το συναρτησιακό $J(y(x))$. Φυσικά μπορούμε να έχουμε αντί για απλές συναρτήσεις από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} , να έχουμε διανυσματικές συναρτήσεις μέσα στο ολοκλήρωμα ή συναρτήσεις με περισσότερες από μια μεταβλητές και κατά συνέπεια αντί για απλό ολοκλήρωμα να έχουμε πολλαπλά ολοκληρώματα.

Ο στόχος του *Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου*, είναι να προσδιορίσει τα *σήματα εισόδου* τα οποία θα εξαναγκάσουν μια *διαδικασία* να ικανοποιήσει *φυσικούς περιορισμούς* και ταυτόχρονα να ελαχιστοποιήσει (μεγιστοποιήσει) κάποια *κριτήρια απόδοσης*. Έχουμε λοιπόν για παράδειγμα μια *διαδικασία* (σύστημα) η οποία περιγράφεται, αν το σύστημα είναι συνεχές, από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων της μορφής :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= c(x(t), u(t), t) \end{aligned} \tag{1}$$

όπου

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}, y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

είναι τα διανύσματα κατάστασης, εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Επίσης έχουμε ένα *δείκτη απόδοσης* ο οποίος συνήθως περιγράφεται από ένα συναρτησιακό της μορφής :

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \tag{2}$$

Στόχος της *Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου* είναι να υπολογίσει μια *επιτρεπτή είσοδο* $u^*(t)$, δηλαδή μια είσοδο $u^*(t)$ που να ικανοποιεί κάποιους φυσικούς περιορισμούς όπως για παράδειγμα να ανήκει σε έναν επιτρεπτό χώρο συναρτήσεων Ω_u , τέτοια ώστε να οδηγήσει το σύστημα που

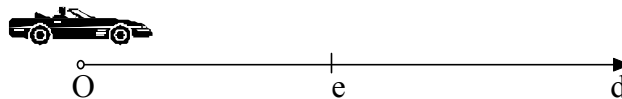
περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις (1), σε μια επιτρεπτή τροχιά $x^*(t)$, δηλαδή μια τροχιά $x^*(t)$ που να ικανοποιεί κάποιους φυσικούς περιορισμούς όπως για παράδειγμα να ανήκει σε έναν επιτρεπτό χώρο συναρτήσεων Ω_x , η οποία θα ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης της σχέσεως (2). Η είσοδος $u^*(t)$ ονομάζεται *βέλτιστος έλεγχος (optimal control)*, ενώ το διάνυσμα κατάστασης $x^*(t)$ ονομάζεται *βέλτιστη τροχιά (optimal trajectory)*. Φυσικά αντί για συνεχή συστήματα μπορούμε να έχουμε διακριτά συστήματα, όπως και αντί για συναρτήσεις μιας μεταβλητής να έχουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και αντί απλού ολοκληρώματος να έχουμε πολλαπλά ολοκληρώματα. Τέλος το συναρτησιακό είναι δυνατό να μην περιέχει ολοκλήρωμα.

$$J^* = h(x^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), u^*(t), t) dt \leq h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$$

$$\forall u(t) \in \Omega_u, x(t) \in \Omega_x$$

Η κύρια διαφορά λοιπόν που παρατηρούμε σε σχέση με τα προβλήματα του λογισμού μεταβολών είναι ότι οι συναρτήσεις από τις οποίες εξαρτάται το συναρτησιακό (2), ικανοποιούν κάποιες επιπλέον συνθήκες είτε με την μορφή αλγεβρικών εξισώσεων, είτε με την μορφή διαφορικών εξισώσεων, είτε τέλος με την μορφή ανισοτικών σχέσεων. Ένα από τα προβλήματα που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα και το οποίο μοιάζει με αυτά του βέλτιστου ελέγχου, είναι το βραχυστόχρονο πρόβλημα μιας και είναι το πρώτο πρόβλημα που μελετά την δυναμική συμπεριφορά ενός σώματος (σύστημα), ενώ ταυτόχρονα ζητάει την εύρεση της βέλτιστης τροχιάς του σώματος αυτού (συναρτησιακό). Ας δούμε όμως ένα παράδειγμα όπου φαίνεται καθαρά ο στόχος του βέλτιστου ελέγχου.

Παράδειγμα 1 Θεωρείστε ένα αυτοκίνητο το οποίο κινείται.



Οι εξισώσεις κίνησης (*διαδικασία*) περιγράφονται από τον παρακάτω τύπο :

$$\ddot{d}(t) = a(t) + b(t)$$

όπου $d(t)$ είναι η θέση του κινητού την χρονική στιγμή t , και $a(t), b(t)$ είναι η επιτάχυνση και η επιβράδυνση που δέχεται το κινητό λόγω του πεντάλ του γκαζιού και του πεντάλ του φρένου αντίστοιχα. Αν θέσουμε

$$x_1(t) = d(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{d}(t)$$

$$x_2(t) = \dot{d}(t) = \dot{x}_1(t)$$

τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης μπορεί να αντικατασταθεί από το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$$

μιας και $\ddot{d}(t) = a(t) + b(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = a(t) + b(t)$. Αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα ξεκίνησε από ηρεμία (δηλαδή είχε μηδενική ταχύτητα) και θέλει να φτάσει την χρονική στιγμή t_f στο σημείο e και να σταματήσει, θα πρέπει να έχουμε τις παρακάτω οριακές συνθήκες :

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t_0) \\ \dot{d}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t_f) \\ \dot{d}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο δεν θα προσπεράσει το σημείο e πριν την χρονική στιγμή t_f θα πρέπει επιπλέον να έχουμε κάποιους φυσικούς περιορισμούς που αφορούν το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$:

$$0 \leq x_1(t) \leq e, \quad 0 \leq x_2(t)$$

Επίσης λόγω των περιορισμών στις επιδόσεις της μηχανής, θα υπάρχει κάποιο ανώτατο όριο στην επιτάχυνση που μπορεί να επιτευχθεί από το αυτοκίνητο, έστω $M_1 \text{ m/sec}^2$ και λόγω της κατασκευής των φρένων θα υπάρχει επίσης ένα κατώτατο όριο στην επιβράδυνση του αυτοκινήτου έστω $M_2 \text{ m/sec}^2$. Οι φυσικοί περιορισμοί της εισόδου, μπορούν να γραφούν ισοδύναμα ως :

$$0 \leq u_1(t) \leq M_1, \quad -M_2 \leq u_2(t) \leq 0$$

Έστω ότι τα καύσιμα που έχουμε στο αυτοκίνητο είναι περιορισμένα π.χ. G λίτρα. Αν υποθέσουμε ότι η κατανάλωση της βενζίνης είναι ανάλογη της

ταχύτητας $x_2(t) = \dot{d}(t)$ και της επιτάχυνσης $u_1(t) = a(t)$ του αυτοκινήτου, θα έχουμε επιπλέον τον φυσικό περιορισμό στο διάνυσμα κατάστασης και εισόδου :

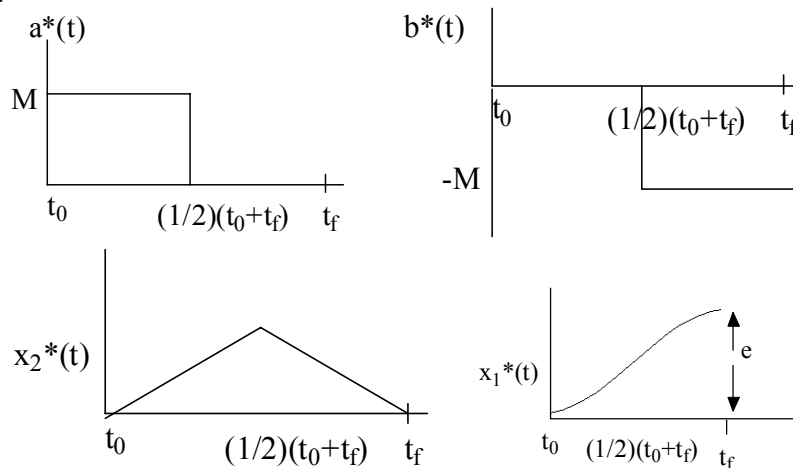
$$\int_{t_0}^{t_f} [k_1 x_2(t) + k_2 u_1(t)] dt \leq G$$

Αν θέλουμε το παραπάνω αυτοκίνητο να φτάσει στο συντομότερο δυνατό χρόνο τότε η ποσότητα που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι η παρακάτω :

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

Στόχος του βέλτιστου ελέγχου στο παραπάνω πρόβλημα είναι να βρεθεί η είσοδος $u^*(t)$ και το διάνυσμα κατάστασης $x^*(t)$ που θα ικανοποιούν τους φυσικούς περιορισμούς που περιγράψαμε παραπάνω, τα οποία θα ελαχιστοποιούν τον δείκτη απόδοσης $J = \int_{t_0}^{t_f} dt$. Το παραπάνω πρόβλημα

είναι γνωστό και ως πρόβλημα ελαχίστου χρόνου. Η λύση στο παραπάνω πρόβλημα με την προϋπόθεση ότι η απόλυτη τιμή της μέγιστης επιτάχυνσης και της μέγιστης επιβράδυνσης είναι ίσες με M , δίνεται στο παρακάτω γράφημα :



Μπορούμε να δείξουμε ότι αν εφαρμόσουμε είσοδο της μορφής $u_1(t) + u_2(t) = e\delta^{(1)}(t)$ τότε θα πάρουμε ως λύση $x_1(t) = e, x_2(t) = e\delta(t)$, η

οποία πετυχαίνει τον στόχο μας σε ποιο σύντομο χρόνο (σχεδόν ακαριαία), αλλά δεν ικανοποιεί τους φυσικούς περιορισμούς της άσκησης. ■

Παρακάτω διατυπώνουμε κατηγορίες προβλημάτων που συχνά συναντούμε στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου και τους αντίστοιχους δείκτες απόδοσης που χρησιμοποιούμε.

Πρόβλημα Ελαχίστου Χρόνου (time optimal control problem)

Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in \Omega_u$ που θα μεταφέρει το σύστημα μας από μια αρχική κατάσταση $x(t_0)$ σε μια επιθυμητή τελική κατάσταση $x(t_f)$ στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι :

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

Πρόβλημα Ελέγχου Τελικής Τιμής (terminal control problem)

Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in \Omega_u$ που θα ελαχιστοποιήσει την τελική τιμή του διανύσματος κατάστασης $x(t_f)$ από μια επιθυμητή τελική κατάσταση $r(t_f)$. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \sum_{i=1}^n [x_i(t_f) - r_i(t_f)]^2 = \|x(t_f) - r(t_f)\|^2$$

ή πιο γενικά

$$J = [x(t_f) - r(t_f)]^T H [x(t_f) - r(t_f)]$$

όπου H συμμετρικά θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Η πορεία ενός βαλλιστικού πυραύλου του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $x(t)$ για να πετύχει τον στόχο του την χρονική στιγμή t_f , όταν οι συντεταγμένες του στόχου δίνονται από το διάνυσμα $r(t_f)$.

Πρόβλημα Παρακολούθησης (tracking problem)

Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in \Omega_u$ η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ σε μια επιθυμητή τροχιά $r(t)$. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[x(t) - r(t) \right]^T Q \left[x(t) - r(t) \right] dt = \int_{t_0}^{t_f} \|x(t) - r(t)\|_Q^2 dt$$

όπου Q συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Η πορεία ενός βαλλιστικού πυραύλου του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $x(t)$ ο οποίος θέλει να αναχαιτίσει έναν στόχο του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $r(t)$. \square

Πρόβλημα Ρυθμιστή (regulator problem)

Πρόκειται για ειδική περίπτωση του προβλήματος ανίχνευσης. Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in \Omega_u$ η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ όσο το δυνατό πιο κοντά στο μηδενικό διάνυσμα. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \|x(t_f)\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\|x(t)\|_Q^2 \right] dt$$

όπου Q συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακας, ενώ H είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης της Συνολικής Ισχύος (minimum control effort problem)

Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την βέλτιστη είσοδο $u^*(t) \in \Omega_u$ η οποία προσπαθεί να μεταφέρει το σύστημα μας από μια αρχική κατάσταση $x(t_0)$ σε μια επιθυμητή τελική κατάσταση $x(t_f)$ με την ελάχιστη δυνατή είσοδο. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[u^T(t) R u(t) \right] dt = \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_R^2 dt$$

όπου R συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Η μεταφορά ενός μέσου (αυτοκίνητο, αεροπλάνο, δορυφόρος) από ένα σημείο σε ένα άλλο με τα ελάχιστα δυνατά καύσιμα. □

Φυσικά μπορούμε να έχουμε συνδυασμό των παραπάνω προβλημάτων, όπως για παράδειγμα η αναζήτηση της βέλτιστης εισόδου $u^*(t) \in \Omega_u$ η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ σε μια επιθυμητή τροχιά $r(t)$, με την ελάχιστη δυνατή είσοδο. Ο δείκτης απόδοσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\|x(t) - r(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 \right] dt$$

όπου Q, R συμμετρικά θετικά ορισμένοι πίνακες.

Παράδειγμα. Η πορεία ενός βαλλιστικού πυραύλου του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $x(t)$ ο οποίος θέλει να αναχαιτίσει έναν στόχο του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από το διάνυσμα $r(t)$, ξοδεύοντας τα ελάχιστα δυνατά καύσιμα. □

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Κυβεντίδης Θ., 1994, Λογισμός μεταβολών, Εκδ. Ζήτη.
- [2] Καραμπετάκης Ν., 2007, Από τον Λογισμό των Μεταβολών στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος «Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου».
- [3] Anderson, B., & Moore, J., 1971, Linear optimal control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [4] M. Athans and P. Falb, 1966, Optimal Control : An Introduction to the Theory and its Applications, McGraw Hill Book Company, New York, NY.
- [5] Bryson Jr., A., 1996, Optimal Control—1950 to 1985. IEEE Control Systems Magazine, 6, 26–33.
- [6] S.Cuomo, 2000, Πάππος ο Αλεξανδρεύς και τα Μαθηματικά της Ύστερης Αρχαιότητας, Εκδόσεις Έναλιος.
- [7] Goldstine, H., 1981, A history of the calculus of variations from the 17th to the 19th century. New York: Springer.
- [8] R.E. Kalman, 1960, Contributions to the Theory of Optimal Control, Bol. Soc. Mat. Mexicana, Vol.5, pp.102-119.

- [9] D.E. Kirk, 1970, *Optimal Control Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [10] F. L. Lewis and V. L. Syrmos, 1995, *Optimal Control*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, NY.
- [11] E.J. McShane. 1989, The calculus of variations from the beginning through optimal control theory, *SIAM J. Con. Optim.*, Vol.27, No.5, pp.916-939.
- [12] D. S. Naidu, 2002, *Optimal Control Systems*, CRC Press LLC.
- [13] L. S. Pontryagin, 1961, *Optimal Regulation Processes*, *Uspekhi Mat. Nauk*, USSR, Vol.14, 1959, pp.3-20) English Translation : *Amer. Math. Society Trans.*, Series 2, Vol.18, 1961, pp.321-339.
- [14] L. S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, 1962, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley-Interscience, New York, NY.
- [15] Sussmann, H., & Willems, J., 1997, 300 years of optimal control: From the Brachystochrone to the Maximum Principle. *IEEE Control Systems Magazine*, 6, 32–44.
- [16] The MacTutor History of Mathematics Archive, web page of the University of St. Andrews, Scotland, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html> .