Κεφάλαιο 10[1]

Διαγωνιοποίηση

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (4x-5y, 2x-3y)$$

Είναι γνωστό από το κεφάλαιο 8.4 ότι ο πίνακας της παραπάνω γραμμικής απεικόνισης, ως προς την συνήθη βάση $\{(1 \quad 0),(0 \quad 1)\}$ είναι ο

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

ενώ αντίθετα αν επιλέξουμε ως βάση την $\{(1 \quad 1),(2 \quad 1)\}$ τότε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης θα είναι ο εξής :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Μάλιστα οι πίνακες A_1, A_2 όπως δείξαμε στο κεφάλαιο 8.5 είναι όμοιοι, δηλαδή συνδέονται μέσω ενός αντιστρέψιμου πίνακα $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται πάντα από την βάση την οποία επιλέγουμε. Μάλιστα όλοι οι πίνακες που αναπαριστούν μια γραμμική απεικόνιση $f: X \to X$ μέσω διαφορετικής βάσης συνδέονται μεταξύ τους με τον μετασχηματισμό ομοιότητας που δείξαμε παραπάνω.

Ένα από τα βασικά προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας που προκύπτει από το παραπάνω παράδειγμα είναι το εξής : «Έστω ότι έχουμε την γραμμική απεικόνιση

[1] Συγγραφέας : Ν. Καραμπετάκης

$f : X \to X$. Είναι δυνατό να υπολογίσουμε μια βάση του χώρου X ώστε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης να είναι διαγώνιος;» Το πρόβλημα όπως αρχικά φάνηκε με το παράδειγμα ανάγεται στην εύρεση ενός αντιστρέψιμου πίνακα T τέτοιου ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος, όπου ο πίνακας A είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης ως προς την συνήθη βάση του χώρου X . Η απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα όπως θα δούμε παρακάτω δεν είναι πάντα καταφατική. Στόχος λοιπόν του κεφαλαίου αυτού είναι να διατυπώσει πότε η λύση του παραπάνω προβλήματος είναι εφικτή ή ισοδύναμα πότε με μετασχηματισμούς ομοιότητας μπορώ να διαγωνιοποιήσω έναν πίνακα A. Επιπλέον μελετούμε ειδικές περιπτώσεις πινάκων όπως οι συμμετρικοί και ερμητιανοί πίνακες καθώς και οι ορθογώνιοι πίνακες. Πριν προχωρήσετε στην ανάγνωση του κεφαλαίου αυτού είναι χρήσιμο να κάνετε μια επανάληψη στις ενότητες 8.3-8.5, ώστε να θυμηθείτε : α) τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζω τον πίνακα μιας γραμμικής απεικόνισης, β) πως ορίζονται δύο πίνακες ως όμοιοι, και γ) την σχέση των όμοιων πινάκων με την αλλαγή βάσης μιας γραμμικής απεικόνισης.

10.1 Διαγωνιοποίηση

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 5x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

Είναι γνωστό από το κεφάλαιο 8.4 ότι ο πίνακας της παραπάνω γραμμικής απεικόνισης, ως προς την συνήθη βάση $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right\}$ είναι ο

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

γιατί

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 1 - 5\times 0 \\ 2\times 1 - 3\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 0 - 5\times 1 \\ 2\times 0 - 3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = (\mathbf{-5})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbf{-3})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια δεύτερη βάση του $\mathbb{R}^2$, έστω $E_2 = \{v_1, v_2\}$ και θέλουμε ο πίνακας ως προς την βάση αυτή να είναι διαγώνιος δηλ.

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Θα πρέπει λοιπόν να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

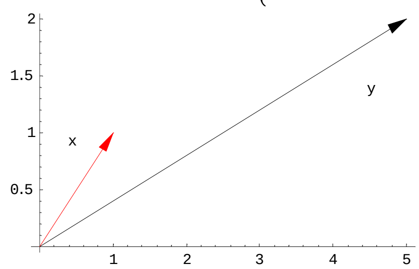
$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 v_2$$

$$f(v_2) = 0 v_1 + \lambda_2 v_2$$

ή ισοδύναμα θα πρέπει τα διανύσματα v_1, v_2 να είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A_1 που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2. Είναι γνωστό από το κεφάλαιο 9.1 ότι στον πίνακα A_1 αντιστοιχούν οι παρακάτω ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα:

$$\left\{ \lambda = 2 \to V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}, \left\{ \lambda = -1 \to V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

Αν λοιπόν επιλέξω ως βάση του $\mathbb{R}^2$ την $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T \right\}$,



τότε θα έχουμε ως πίνακα της γραμμικής απεικόνισης f τον παρακάτω *διαγώνιο* πίνακα:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Είναι σημαντικό επίσης να δούμε με ποιον τρόπο συνδέονται οι δύο βάσεις E_1, E_2 του $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες $(a,b)_{E_2}$ ως προς την βάση $E_2 = \{v_1, v_2\}$ θα γράφεται ως

$$v = a\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{E_2} \Leftrightarrow v_{E_1} = Pv_{E_2}$$

όπου v_{E_1} συμβολίζω τις συντεταγμένες του διανύσματος v ως προς την συνήθη βάση E_1. Αν πολλαπλασιάσουμε με P^{-1} την παραπάνω σχέση από αριστερά θα έχουμε την σχέση :

$$v_{E_2} = P^{-1}v_{E_1}$$

Το παρακάτω διάγραμμα μας δείχνει τις σχέσεις μεταξύ των βάσεων του χώρου $\mathbb{R}^2$ καθώς και τις γραμμικές απεικονίσεις ως προς τις διαφορετικές βάσεις.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
v_{E_2} \arrow[r, "f : v_{E_2} \to A_2 v_{E_2}", "(1)"'] \arrow[d, "(2)", "v_{E_2} \to Pv_{E_2}"'] & f\left(v_{E_2}\right)_{E_2} \\
v_{E_1} \arrow[r, "(3)", "f : v_{E_1} \to A_1 v_{E_1}"'] & f\left(v_{E_1}\right)_{E_1} \arrow[u, "(4)", "v_{E_1} \to P^{-1}v_{E_1}"']
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 10.1.1 Αλλαγή βάσης στην γραμμική απεικόνιση f.

Από το παραπάνω διάγραμμα καταλήγουμε στα εξής δύο συμπεράσματα :

α) Από την σχέση (1) στο παραπάνω διάγραμμα έχουμε

$$f\left(v_{E_2}\right)_{E_2} = A_2 v_{E_2}$$

β) Από τις σχέσεις (2) και (3) στο παραπάνω διάγραμμα έχουμε :

$$\left.\begin{cases}(2) \quad v_{E_1} = Pv_{E_2} \\ (3) \quad f\left(v_{E_1}\right)_{E_1} = A_1 v_{E_1}\end{cases}\right\} \Rightarrow f\left(v_{E_1}\right)_{E_1} = A_1 P v_{E_2}$$

το οποίο σε συνδυασμό με την σχέση (4) του παραπάνω διαγράμματος μας δίνει :

$$\left.\begin{cases}\quad f\left(v_{E_1}\right)_{E_1} = A_1 P v_{E_2} \\ (4) \quad f\left(v_{E_2}\right)_{E_2} = P^{-1} f\left(v_{E_1}\right)_{E_1}\end{cases}\right\} \Rightarrow f\left(v_{E_2}\right)_{E_2} = \left(P^{-1}A_1 P\right) v_{E_2}$$

Συνεπώς από (α) και (β), θα πρέπει να ισχύει :

$$f\left(v_{E_2}\right)_{E_2} = \left(A_2\right) v_{E_2} = \left(P^{-1} A_1 P\right) v_{E_2} \Rightarrow A_2 = P^{-1} A_1 P$$

Δηλαδή οι πίνακες A_1, A_2 είναι *όμοιοι* και ο πίνακας ομοιότητας είναι ο P που δημιουργείται από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A_1, κάτι που ουσιαστικά περιμέναμε από την θεωρία του κεφαλαίου 8.5.

Το παραπάνω παράδειγμα αποτελεί ειδική περίπτωση του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 10.1.1
Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f : X \to X$ όπου X ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω στο $F\left(\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}\right)$. Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f διαγωνιοποιείται, δηλαδή η f μπορεί να παρασταθεί από έναν διαγώνιο πίνακα, αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του X, η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f. Τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης θα είναι οι ιδιοτιμές της f.
Απόδειξη.
$(\Leftarrow)$Έστω $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ μια βάση του χώρου X η οποία αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης f. Επειδή τα $e_i, i = 1, 2, ..., n$ αποτελούν ιδιοδιανύσματα της f θα έχουμε :

$$\begin{aligned} f\left(e_1\right) &= \lambda_1 e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n \\ f\left(e_2\right) &= 0e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + 0e_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f\left(e_n\right) &= 0e_1 + 0e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \end{aligned}$$

και συνεπώς ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f θα είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$(\Rightarrow)$ Αν ο πίνακας της f διαγωνιοποιείται δηλαδή έχει την παραπάνω μορφή του πίνακα A τότε θα ισχύει η προτελευταία σχέση και συνεπώς τα λ_i και e_i θα αποτελούν τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της f. ■

Από τα Θεωρήματα 9.1.3 και 10.1.1 μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 10.1.2
Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f : X \to X$ όπου X ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n πάνω στο $F\left(\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}\right)$. Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f έχει n διαφορετικές ρίζες στο $F\left(\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}\right)$ τότε η γραμμική απεικόνιση f διαγωνιοποιείται.
Απόδειξη

Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f έχει *n* διαφορετικές ιδιοτιμές, θα έχει σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.3 *n* γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που θα αποτελούν μια βάση του χώρου X και συνεπώς από το Θεώρημα 10.1.1 θα διαγωνιοποιείται η f. ■

Παράδειγμα 10.1.3

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *η οποία δίνεται από την σχέση*

$$f(x_1, x_2) = (-5x_1 + 3x_2, 6x_1 - 2x_2)$$

Να ελέγξετε αν η παραπάνω γραμμική απεικόνιση διαγωνιοποιείται.

Απάντηση

Από το παράδειγμα 9.1.4 έχουμε ότι οι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης *f* είναι $\lambda = -8 \,\&\, \lambda = 1$ και συνεπώς από το Θεώρημα 10.1.2 η γραμμική απεικόνιση *f* διαγωνιοποιείται. Αρκεί να διαλέξουμε ως βάση του χώρου $\mathbb{R}^2$ τον χώρο που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα της *f* που είναι $(-1,1),(1,2)$. Τότε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης που θα προκύψει θα είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία τις αντίστοιχες ιδιοτιμές της *f* δηλ. -8 και 1 αντίστοιχα. ■

Παράδειγμα 10.1.4

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *η οποία δίνεται από την σχέση*

$$f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

Να ελέγξετε αν η παραπάνω γραμμική απεικόνιση διαγωνιοποιείται.

Απάντηση

Από το παράδειγμα 9.1.5 έχουμε ότι η γραμμική απεικόνιση *f* δεν έχει ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς δεν διαγωνιοποιείται. Αντίθετα αν η f οριζόταν ως εξής : $f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ τότε θα είχε τις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda = -i \,\&\, \lambda = i$ και συνεπώς από το Θεώρημα 10.1.2 η γραμμική απεικόνιση *f* διαγωνιοποιείται. Αρκεί να διαλέξουμε ως βάση του χώρου $\mathbb{C}^2$ τον χώρο που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα της *f* που είναι $(i,1),(-i,1)$. Τότε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης που θα προκύψει θα είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία τις αντίστοιχες ιδιοτιμές της *f* δηλ. -*i* και *i* αντίστοιχα. ■

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση που δεν έχουμε διακεκριμένες ιδιοτιμές, αλλά έχουμε ιδιοτιμές με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη του ένα. Τότε το παραπάνω θεώρημα μπορεί να γενικευτεί ως εξής :

Θεώρημα 10.1.5

Έστω μια γραμμική απεικόνιση $f: X \to X$ *όπου* X *ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω στο* $F(\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C})$. *Η f διαγωνιοποιείται αν και μόνο αν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της f ανήκουν στο* $F(\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C})$ *και η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής (αλγεβρική πολλαπλότητα) είναι ίση με την διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου (γεωμετρική πολλαπλότητα).* ■

Παράδειγμα 10.1.6

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η οποία δίνεται από την σχέση

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(4x_1 - 5x_2 + x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3, -x_3\right)$$

Να ελέγξετε αν η παραπάνω γραμμική απεικόνιση διαγωνιοποιείται.

Απάντηση

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f είναι ο ίδιος με τον πίνακα A στο παράδειγμα 9.1.11 και 9.1.13. Συνεπώς έχουμε ότι η γραμμική απεικόνιση f έχει ιδιοτιμές τις -1 και 2 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και 1 στο $\mathbb{R}$. Οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι V_{-1} και V_2 έχουν διάσταση 1 ο καθένας ή ισοδύναμα οι ιδιοτιμές -1 και 2 του πίνακα τις γραμμικής απεικόνισης έχουν γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και 1 αντίστοιχα. Επειδή η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής -1 δεν ταυτίζεται με την αντίστοιχη γεωμετρική πολλαπλότητα δεν διαγωνιοποιείται σύμφωνα με το Θεώρημα 10.1.5 η f. ∎

Έστω A_1 ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f ως προς την βάση $E_1 = \left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\right\}$, και A_2 ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f ως προς την βάση $E_2 = \left\{e_1, e_2, ..., e_n\right\}$. Αν P είναι ο πίνακας μετάβασης από την βάση E_2 στην βάση E_1, τότε σύμφωνα με το κεφάλαιο 8.5, αλλά και το διάγραμμα 10.1.1, θα ισχύει η σχέση $A_2 = P^{-1}A_1P$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η διαγωνιοποίηση μιας γραμμικής απεικόνισης f ανάγεται στην εύρεση ενός αντιστρέψιμου πίνακα P τέτοιου ώστε ο πίνακας $A_2 = P^{-1}A_1P$ να είναι διαγώνιος, όπου A_1 ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f. Παρακάτω λοιπόν θα ασχοληθούμε με το ισοδύναμο πρόβλημα του προσδιορισμού συνθηκών κάτω από τις οποίες ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Ορισμός 10.1.7

Ένας πίνακας $A \in M_n\left[\mathbb{R}\right]\left(M_n\left[\mathbb{C}\right]\right)$ θα ονομάζεται διαγωνιοποιήσιμος εάν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα ή ισοδύναμα αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n\left[\mathbb{R}\right]\left(M_n\left[\mathbb{C}\right]\right)$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $D = P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος. ∎

Οι διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες έχουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον διότι μπορούμε εύκολα όπως θα δούμε παρακάτω να υπολογίσουμε συναρτήσεις που προκύπτουν από αυτούς όπως η δύναμη πίνακα, ο υπολογισμός ενός πολυωνύμου με στοιχεία πίνακες, ο υπολογισμός ενός εκθετικού πίνακα κ.α.. Ένα βασικό ερώτημα που γεννιέται, είναι πως θα μπορέσουμε εύκολα να διαπιστώσουμε εάν ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος. Στο ερώτημα αυτό έρχεται να απαντήσει το παρακάτω θεώρημα που είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 10.1.5.

Θεώρημα 10.1.8

(α) Ένας πίνακας $A \in M_n\left[\mathbb{R}\right]\left(M_n\left[\mathbb{C}\right]\right)$ είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο : α) όλες οι ιδιοτιμές του ανήκουν πάνω στο $\mathbb{R}\left(\mathbb{C}\right)$ και β) η αλγεβρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών του ταυτίζεται με την αντίστοιχη γεωμετρική πολλαπλότητα.

Στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε ο αντιστρέψιμος πίνακας $T \in M_n\left[\mathbb{R}\right]\left(M_n\left[\mathbb{C}\right]\right)$ που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A

είναι τέτοιος ώστε ο $S = T^{-1}AT$ *να είναι διαγώνιος με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο τις ιδιοτιμές του πίνακα Α.*

(β) Ένας πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}](M_n[\mathbb{C}])$ *είναι διαγωνιοποιήσιμος εάν και μόνο το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα Α,* $m_A(\lambda)$*, είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων, δηλαδή*

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_k)$$

όπου οι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *είναι ανά δύο διάφοροι.* ∎

Παράδειγμα 10.1.9

Θεωρείστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3[\mathbb{R}]$$

που μελετήσαμε στο παράδειγμα 9.1.15. Έχουμε αποδείξει στο παράδειγμα 3 ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in M_3[\mathbb{R}]$ είναι οι 2 και 8 με αλγεβρικές πολλαπλότητες 2 και 1 αντίστοιχα, ενώ οι γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών του $A \in M_3[\mathbb{R}]$ είναι επίσης 2 και 1 αντίστοιχα. Άρα βάσει του Θεωρήματος 10.1.8α ο πίνακας διαγωνιοποιείται. Μάλιστα ο πίνακας *Τ* που σχηματίζεται από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *Α*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι τέτοιος ώστε

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{S}$$

Ένας άλλος τρόπος ελέγχου για το αν ο πίνακας *Α* είναι διαγωνιοποιήσιμος είναι με την εφαρμογή του Θεωρήματος 10.1.8β. Σύμφωνα με το θεώρημα 10.1.8β ο πίνακας $A \in M_3[\mathbb{R}]$ θα είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο του πολυώνυμο είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων. Επειδή όμως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A \in M_3[\mathbb{R}]$ είναι το $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8)$ συνεπώς ο πίνακας $A \in M_3[\mathbb{R}]$ θα είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα $A \in M_3[\mathbb{R}]$ είναι το $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 8)$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $m_A(A) = (A - 2 \times I_3)(A - 8 \times I_3) = 0_{2,2}$ και συνεπώς ο πίνακας $A \in M_3[\mathbb{R}]$ είναι διαγωνιοποιήσιμος. ∎

Παράδειγμα 10.1.10

Θεωρείστε τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\in M_2[\mathbb{R}]$$

ο οποίος έχει ως ιδιοτιμή την 2 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι

$$V_2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle$$

και $\dim V_2=1$. Συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι 1 που είναι διαφορετική της αλγεβρικής πολλαπλότητας 2 και άρα ο πίνακας δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος. Παρατηρήστε ότι δεν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας

$$T=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, ad-bc\neq 0$$

τέτοιος ώστε

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}_{T}^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}_{T}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}2a=2a & a+2b=2b\\ 2c=2c & c+2d=2d\end{bmatrix}\Leftrightarrow a=c=0\Rightarrow ad-cb=0$$

Αν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 10.1.8β θα διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο του πολυώνυμο είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων. Επειδή όμως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A\in M_2[\mathbb{R}]$ είναι το $\chi_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$ συνεπώς ο πίνακας $A\in M_2[\mathbb{R}]$ θα είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα $A\in M_2[\mathbb{R}]$ είναι το $m_A(\lambda)=(\lambda-2)$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$m_A(A)=(A-2\times I_3)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0_{2,2}$$

και συνεπώς ο πίνακας $A\in M_2[\mathbb{R}]$ δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος. ■

Σημείωση. Μια υποπερίπτωση του Θεωρήματος 10.1.8 είναι αυτή για την οποία ο πίνακας A έχει απλές ιδιοτιμές, δηλαδή ιδιοτιμές των οποίων η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι 1. Τότε η γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών ταυτίζεται με την αλγεβρική πολλαπλότητα και συνεπώς ο πίνακας διαγωνιοποιείται. Άρα στις περιπτώσεις αυτές δεν χρειάζεται να ελέγξουμε ποια είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών.

Αλγόριθμος διαγωνιοποίησης ενός πίνακα $A \in M_n[\mathbb{R}](M_n[\mathbb{C}])$

Βήμα 1. Υπολόγισε τις ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\}, \lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), k \le n$ του πίνακα A.

Βήμα 2. Υπολόγισε τα ιδιοδιανύσματα $\{e_1, e_2, ..., e_k\}, e_i \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του πίνακα A. Αν αυτά είναι στο πλήθος n τότε ο πίνακας διαγωνιοποιείται και ακολούθησε τα παρακάτω βήματα, διαφορετικά ο πίνακας δεν διαγωνιοποιείται.

Βήμα 3. Σχημάτισε τον πίνακα $T = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] \in M_n[\mathbb{R}](M_n[\mathbb{C}])$ που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Βήμα 4. Τότε

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_v \end{bmatrix} = T^{-1} A T$$

όπου λ_i είναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα e_i $1 \le i \le n$.

Ασκήσεις 10.1

1. Να ελέγξετε ποιες από τις παρακάτω γραμμικές απεικονίσεις διαγωνιοποιείται:

(a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (6x+8y, -x+2y)$

(b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x-y, x+3y)$

(c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (3x-y-z, -12x+5z, 4x-2y-z)$

(d) $f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, f(x,y) = (2x+4y, -2x-2z)$

2. Να ελέγξετε ποιοι από τους παρακάτω πίνακες διαγωνιοποιούνται, και να φέρεται στην διαγώνια μορφή αυτούς οι οποίοι διαγωνοποιούνται.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \in M_2[\mathbb{R}] \;;\; A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2[\mathbb{R}] \;;\; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3[\mathbb{R}]$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -9 & 9 & -4 \end{pmatrix} \in M_3[\mathbb{R}] \;;\; A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4[\mathbb{R}]$$

3. Ένα διάνυσμα x_m ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα A τύπου m που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν $(\lambda I - A)^m x_m = 0$ αλλά $(\lambda I - A)^{m-1} x_m \neq 0$.

   Θεωρείστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3\left[\mathbb{R}\right]$$

από τα παραδείγματα 9.1.11 και 9.1.13. Ο πίνακας αυτός έχουμε δείξει ότι έχει τις ιδιοτιμές -1 και 2 με αλγεβρικές πολλαπλότητες 2 και 1 αντίστοιχα, καθώς και γεωμετρικές πολλαπλότητες 1 και 1 αντίστοιχα. Ο πίνακας A συνεπώς (γιατί;) δεν διαγωνιοποιείται.

(α) Ελέγξτε αν ο πίνακας Α έχει γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 2 για την ιδιοτιμή λ=-1, και αν ναι υπολογίστε το.

(β) Αποδείξτε ότι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1 και το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 2 που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(γ) Δημιουργήστε τον πίνακα P που περιέχει ως πρώτη και τρίτη στήλη τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές -1 και 2 και ως δεύτερη στήλη το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 2 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1, και στη συνέχεια υπολογίστε τον πίνακα $P^{-1}AP$. Η μορφή του πίνακα που σχηματίζεται ονομάζεται πίνακας *Jordan*.

Λύσεις ασκήσεων 10.1

1. (α) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης έχει δύο μιγαδικές ιδιοτιμές και συνεπώς η γραμμική απεικόνιση δεν διαγωνιοποιείται. Θα γινόταν η διαγωνιοποίηση αν η γραμμική απεικόνιση οριζόταν με διαφορετικό πεδίο ορισμού και τιμών π.χ. $f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.
(β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης έχει μια ιδιοτιμή (λ=2) αλγεβρικής πολλαπλότητας 2 και γεωμετρικής πολλαπλότητας 1 και συνεπώς η γραμμική απεικόνιση δεν διαγωνιοποιείται.
(γ) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης έχει 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές (2,-1,1) και συνεπώς η γραμμική απεικόνιση διαγωνιοποιείται.
(δ) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης έχει 2 ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}$ $(2i,-2i)$ και συνεπώς λόγω του ορισμού της συνάρτησης $f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ η γραμμική απεικόνιση διαγωνιοποιείται.

2. (α) Ο πίνακας A_1 έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές (-3,12) και συνεπώς διαγωνιοποιείται ή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα $m_A(\lambda)=(\lambda+3)(\lambda-12)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
(β) Επειδή ο πίνακας A_2 ορίζεται στο $M_2[\mathbb{R}]$ και έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές $(-i,i)$ που δεν ανήκουν στο $\mathbb{R}$ δεν διαγωνιοποιείται $\left(m_A(\lambda)=\lambda^2+1\right)$. Θα γινόταν η διαγωνιοποίηση αν $A_2 \in M_2[\mathbb{C}]$ ($m_A(\lambda)=(\lambda+i)(\lambda-i)$).
(γ) Ο πίνακας A_3 έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές (-2,2,4) και συνεπώς διαγωνιοποιείται ($m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-4)$).
(δ) Ο πίνακας A_4 έχει μια ιδιοτιμή (λ=-1) αλγεβρικής πολλαπλότητας 3 και γεωμετρικής πολλαπλότητας 1 και συνεπώς δεν διαγωνιοποιείται (αν $m_A(\lambda)=(\lambda+1)$ τότε $m_A(A)=(A+I_3)\neq 0$).
(ε) Ο πίνακας A_5 έχει 4 διακεκριμένες ιδιοτιμές (-1,2,3,4) και συνεπώς διαγωνιοποιείται ($m_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$).

3. (α) Παρατήρησε ότι

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (-1)-4 & 5 & -1 \\ -2 & (-1)-(-3) & -1 \\ 0 & 0 & (-1)-(-1) \end{pmatrix}^2}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (-1)-4 & 5 & -1 \\ -2 & (-1)-(-3) & -1 \\ 0 & 0 & (-1)-(-1) \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (-1)-4 & 5 & -1 \\ -2 & (-1)-(-3) & -1 \\ 0 & 0 & (-1)-(-1) \end{pmatrix}^2}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (-1)-4 & 5 & -1 \\ -2 & (-1)-(-3) & -1 \\ 0 & 0 & (-1)-(-1) \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς το διάνυσμα $(0,0,1)^T$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1.

(β) $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

(γ)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{J} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{J} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P}$$

10.2 Εφαρμογές της διαγωνιοποίησης πινάκων.

10.2.1 Δυνάμεις πινάκων

Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}](M_n[\mathbb{C}])$ είναι διαγωνιοποιήσιμος. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $T \in M_n[\mathbb{R}](M_n[\mathbb{C}])$ τέτοιος ώστε

$$S = T^{-1}AT \Leftrightarrow A = TST^{-1} \Leftrightarrow$$

$$A^k = \left(TST^{-1}\right)^k = \left(TST^{-1}\right)\left(TST^{-1}\right)\cdots\left(TST^{-1}\right) = TS^kT^{-1}$$

Παρατήρησε ότι κάθε T^{-1} αναιρεί έναν T, εκτός του αρχικού και του τελικού T. Συνεπώς προκειμένου να υπολογίσουμε την δύναμη ενός πίνακα *A*, αρκεί να υπολογίσουμε τον πίνακα μετασχηματισμού *T* και την δύναμη ενός διαγώνιου πίνακα *S*. Από τον παραπάνω τύπο παρατηρούμε επίσης ότι οι ιδιοτιμές του A^k είναι $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k$, οι *k*-στές δυνάμεις των ιδιοτιμών και κάθε ιδιοδιάνυσμα του *A* είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^k. Ο παραπάνω τύπος ισχύει και για αρνητικούς αριθμούς σε περίπτωση που ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα A^{-1} θα είναι $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}$. Τέλος αν ο πίνακας T διαγωνιοποιεί τον πίνακα A, διαγωνιοποιεί επίσης και τον πίνακα A^k.

Παράδειγμα 10.2.1.1

Να υπολογιστεί η ν-οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Απάντηση.

Όπως διαπιστώσαμε στο παράδειγμα 10.1.9, υπάρχει πίνακας *T* τέτοιος ώστε

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{S}$$

και συνεπώς

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$
=\begin{bmatrix} \frac{2}{3}2^n+\frac{1}{3}8^n & -\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{3}8^n & -\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{3}8^n \\ -\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{3}8^n & \frac{2}{3}2^n+\frac{1}{3}8^n & -\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{3}8^n \\ -\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{3}8^n & -\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{3}8^n & \frac{2}{3}2^n+\frac{1}{3}8^n \end{bmatrix}
$$

■

10.2.2 Εξισώσεις διαφορών

Έστω $A \in M_n\left[\mathbb{R}\right]$. Τότε η εξίσωση :

$$x_k = Ax_{k-1}, k = 1, 2, ..$$

καλείται ως εξίσωση διαφορών. Πολλά προβλήματα καταλήγουν στην επίλυση εξισώσεων διαφορών όπως το παραπάνω. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να υπολογίσουμε την λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών, ενώ μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων.

Θεώρημα 10.2.2.1

Η εξίσωση διαφορών $x_k = Ax_{k-1}, k = 1, 2, ..$ έχει ως λύση την $x_k = A^k x_0$.

Απόδειξη

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως :

$$x_1 = Ax_0$$

$$x_2 = Ax_1 = A\left(Ax_0\right) = A^2 x_0$$

$$x_3 = Ax_2 = A\left(A^2 x_0\right) = A^3 x_0$$

....

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η λύση ισχύει για *n=k*

$$x_k = A^k x_0$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει και για n=k+1 :

$$x_{k+1} = Ax_k = A\left(A^k x_0\right) = A^{k+1} x_0$$

■

Παράδειγμα 10.2.2.2[2]

Μια χώρα διαιρείται σε 3 γεωγραφικές περιοχές. Σύμφωνα με στατιστικές κάθε χρόνο το 5% της περιοχής 1 μετακινείται στην περιοχή 2 και 5% στην περιοχή 3. Από τους κατοίκους της περιοχής 2, 15% μετακινείται στην περιοχή 1 και 10% στην περιοχή 3. Τέλος από τους κατοίκους της περιοχής 3, 10% μετακινείται στην περιοχή 1 και 5% στην περιοχή 2. Τι ποσοστό του πληθυσμού κατοικεί στην κάθε περιοχή μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ;

---

[2] Μελετήστε το παράδειγμα αυτό μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου 2 του 2ου τόμου του ΣΕΥ, όπου γίνεται αναφορά στο όριο ακολουθίας.

Απάντηση

Έστω $x_k\left(i\right)$ η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να μένει στην περιοχή k στο τέλος του χρόνου i, και p_{ij} η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού που βρίσκεται στην χώρα i να είναι στην χώρα j στην επόμενη χρονική παρατήρηση.

Εφόσον το 5% της περιοχής 1 μετακινείται στην περιοχή 2 και 5% στην περιοχή 3 (δηλαδή συνολικά 10% μετακινείται), άρα το 90% της περιοχής 1 παραμένει στην περιοχή 1. Επίσης από τους κατοίκους της περιοχής 2, 15% μετακινείται στην περιοχή 1 και από τους κατοίκους της περιοχής 3, 10% μετακινείται στην περιοχή 1. Συνεπώς η πιθανότητα ένα άτομο να βρίσκεται στην περιοχή 1 κατά την επόμενη παρατήρηση θα είναι :

$$x_1(i) = \frac{90}{100}x_1(i-1) + \frac{15}{100}x_2(i-1) + \frac{10}{100}x_3(i-1)$$

Εφόσον το 15% της περιοχής 2 μετακινείται στην περιοχή 1 και 10% στην περιοχή 3 (δηλαδή συνολικά 25% μετακινείται), άρα το 75% της περιοχής 2 παραμένει στην περιοχή 2. Επίσης από τους κατοίκους της περιοχής 1, 5% μετακινείται στην περιοχή 2 και από τους κατοίκους της περιοχής 3, 5% μετακινείται στην περιοχή 2. Συνεπώς η πιθανότητα ένα άτομο να βρίσκεται στην περιοχή 2 κατά την επόμενη παρατήρηση θα είναι :

$$x_2(i) = \frac{5}{100}x_1(i-1) + \frac{75}{100}x_2(i-1) + \frac{5}{100}x_3(i-1)$$

Εφόσον το 10% της περιοχής 3 μετακινείται στην περιοχή 1 και 5% στην περιοχή 2, (δηλαδή συνολικά 15% μετακινείται), άρα το 85% της περιοχής 3 παραμένει στην περιοχή 3. Επίσης από τους κατοίκους της περιοχής 1, 5% μετακινείται στην περιοχή 3 και από τους κατοίκους της περιοχής 2, 10% μετακινείται στην περιοχή 3. Συνεπώς η πιθανότητα ένα άτομο να βρίσκεται στην περιοχή 3 κατά την επόμενη παρατήρηση θα είναι :

$$x_3(i) = \frac{5}{100}x_1(i-1) + \frac{10}{100}x_2(i-1) + \frac{85}{100}x_3(i-1)$$

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix}}_{x_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{15}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{75}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & \frac{85}{100} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i-1) \\ x_2(i-1) \\ x_3(i-1) \end{bmatrix}}_{x_{i-1}}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.2.1 είναι :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}}_{x_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{15}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{75}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & \frac{85}{100} \end{bmatrix}^n}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}}_{x_0}$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα A^n εφαρμόζουμε την μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας και έχουμε :

Βήμα 1. Ιδιοτιμές του πίνακα A : $\left\{1, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}\right\}$. Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι απλές (έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1), ο πίνακας διαγωνιοποιείται.

```
a = {{90/100, 15/100, 10/100}, {5/100, 75/100, 5/100}, {5/100, 10/100, 85/100}}
```

$$\left\{\left\{\frac{9}{10}, \frac{3}{20}, \frac{1}{10}\right\}, \left\{\frac{1}{20}, \frac{3}{4}, \frac{1}{20}\right\}, \left\{\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{17}{20}\right\}\right\}$$

```
Eigenvalues[a]
```

$$\left\{1, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}\right\}$$

Βήμα 2. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 13/7 \\ 4/7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

```
Eigenvectors[a]
```

$$\left\{\left\{\frac{13}{7}, \frac{4}{7}, 1\right\}, \{-1, 0, 1\}, \{1, -2, 1\}\right\}$$

Βήμα 3. Σχηματίζω τον πίνακα $T \in R^{3\times 3}$ που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

$$T = \begin{bmatrix} 13/7 & -1 & 1 \\ 4/7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
t = Transpose[%]
```

$$\left\{\left\{\frac{13}{7}, -1, 1\right\}, \left\{\frac{4}{7}, 0, -2\right\}, \{1, 1, 1\}\right\}$$

Βήμα 4. Τότε

$$S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4/5 & 0\\ 0 & 0 & 7/10\end{bmatrix}=T^{-1}AT \Rightarrow A^n = TS^nT^{-1} \Rightarrow$$

$$A^n=\begin{bmatrix}13/7 & -1 & 1\\ 4/7 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n & 0 & 0\\ 0 & \left(4/5\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(7/10\right)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13/7 & -1 & 1\\ 4/7 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το όριο της παραπάνω δύναμης όταν $n\to\infty$ θα είναι ο πίνακας ($\lim_{n\to\infty}\left(4/5\right)^n=0, \lim_{n\to\infty}\left(7/10\right)^n=0$) :

$$\lim_{n\to\infty}A^n=\begin{bmatrix}13/7 & -1 & 1\\ 4/7 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13/7 & -1 & 1\\ 4/7 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}13/24 & 13/24 & 13/24\\ 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 7/24 & 7/24 & 7/24\end{bmatrix}$$

```
s = {{1, 0, 0}, {0, (4/5)^n, 0}, {0, 0, (7/10)^n}}
```

$$\left\{\{1, 0, 0\}, \left\{0, \left(\frac{4}{5}\right)^n, 0\right\}, \left\{0, 0, \left(\frac{7}{10}\right)^n\right\}\right\}$$

```
t.s.Inverse[t] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n+9\,8^n+13\,10^n) & -\frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(10\,7^n+3\,8^n-13\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n-15\,8^n+13\,10^n)\\ \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) & \frac{1}{6}\left(1+\left(\frac{7}{2}\right)^n5^{1-n}\right) & \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right)\\ \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n-9\,8^n+7\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(-10\,7^n+3\,8^n+7\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n+15\,8^n+7\,10^n)\end{pmatrix}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε την συνάρτηση *MatrixPower*[a,n] για να υπολογίσουμε την n-οστή δύναμη του πίνακα a.

```
MatrixPower[a, n] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n+9\,8^n+13\,10^n) & -\frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(10\,7^n+3\,8^n-13\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n-15\,8^n+13\,10^n)\\ \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) & \frac{1}{6}\left(1+\left(\frac{7}{2}\right)^n5^{1-n}\right) & \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right)\\ \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n-9\,8^n+7\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(-10\,7^n+3\,8^n+7\,10^n) & \frac{1}{3}2^{-3-n}5^{-n}(2\,7^n+15\,8^n+7\,10^n)\end{pmatrix}$$

Το όριο του παραπάνω πίνακα όταν $n\to\infty$ είναι :

```
Limit[MatrixPower[a, n], n → Infinity] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix}\frac{13}{24} & \frac{13}{24} & \frac{13}{24}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24}\end{pmatrix}$$

Επειδή $x_k(i)$,k=1,2,3 αποτελούν την πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να μένει στην περιοχή 1,2, και 3 αντίστοιχα, συνεπώς $x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)=1$, όποιες και αν είναι οι πιθανότητες αυτές. Συνεπώς η λύση της εξίσωσης διαφορών καθώς το $n \to \infty$ θα είναι :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A^n x_0 = \begin{bmatrix} 13/24 & 13/24 & 13/24 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 7/24 & 7/24 & 7/24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13/24 \\ 1/6 \\ 7/24 \end{bmatrix} \left(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)\right) = \begin{bmatrix} 13/24 \\ 1/6 \\ 7/24 \end{bmatrix}$$

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών θα μπορούσε να λυθεί με την συνάρτηση RSolve του Mathematica όπως παρακάτω :

$$\mathbf{RSolve}\Big[\Big\{x_1[k+1] == \frac{90}{100} x_1[k] + \frac{15}{100} x_2[k] + \frac{10}{100} x_3[k],\ x_2[k+1] == \frac{5}{100} x_1[k] + \frac{75}{100} x_2[k] + \frac{5}{100} x_3[k],$$
$$x_3[k+1] == \frac{5}{100} x_1[k] + \frac{10}{100} x_2[k] + \frac{85}{100} x_3[k],\ x_1[0] + x_2[0] + x_3[0] == 1\Big\},\ \{x_1[k], x_2[k], x_3[k]\}, k\Big] \ //$$
$$\mathbf{FullSimplify}$$

$$\Big\{\Big\{x_1[k] \to \frac{1}{3} 2^{-3-2k}\, 25^{-k} \left(-9\, 2^{3+k}\, 5^k\, 7^{1+k} + 253\, 2^{1+k}\, 35^k + 9\, 80^k + 13\, 100^k - 12\,(70^k + 80^k)\, C[2] - 3\, 2^{3+4k}\, 5^k\, C[3]\right),$$
$$x_2[k] \to \frac{1}{6}\left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^k\right) + \left(\frac{7}{10}\right)^k C[2],$$
$$x_3[k] \to \frac{1}{3} 2^{-3-2k}\, 625^{-k} \left(2^{1+k}\, 875^k - 9\, 2000^k + 7\, 2500^k + 12\,(-1750^k + 2000^k)\, C[2] + 3\,(5^{1+3k}\, 16^k + 3\, 2000^k)\, C[3]\right)\Big\}\Big\}$$

Σημείωση. Όλα αυτά ισχύουν κάτω από την προϋπόθεση ότι η διαδικασία είναι μαρκοβιανή, ότι δηλαδή η πιθανότητα οποιασδήποτε μελλοντικής κατάστασης της διαδικασίας, όταν η παρούσα κατάσταση είναι γνωστή δεν αλλοιώνεται από επιπλέον δεδομένα που αφορούν την συμπεριφορά της διαδικασίας στο παρελθόν. ■

Ο πίνακας A στο παραπάνω παράδειγμα λέγεται *πίνακας μετάβασης* της παραπάνω διαδικασίας. Όταν σε ένα σύστημα, όπως αυτό του παραπάνω παραδείγματος, η κατάσταση την χρονική στιγμή i π.χ. $x_k(i)$, εξαρτάται μόνο από την κατάσταση του συστήματος την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή i-1 π.χ. $x_k(i-1)$, τότε η διαδικασία αυτή καλείται *Μαρκοβιανή διαδικασία*. Οι πίνακες όπως ο A καλούνται επίσης ως *Μαρκοβιανοί πίνακες* ή *πίνακες πιθανοτήτων* ή *στοχαστικοί πίνακες*. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα στοιχεία κάθε στήλης του πίνακα A και γενικά των Μαρκοβιανών πινάκων έχουν άθροισμα 1. Επίσης παρόμοια με το παράδειγμα 6.6., σελ. 112 του Α' Τόμου, μπορούμε να δείξουμε ότι μια από τις ιδιοτιμές του Μαρκοβιανού πίνακα είναι η μονάδα, ενώ μπορεί επίσης να δειχθεί ότι όλες οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι μικρότερες ή ίσες της μονάδας, γεγονός που οδηγεί την δύναμη του πίνακα A^n όταν το $n \to \infty$ σε έναν σταθερό πίνακα, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Άμεση συνέπεια του συμπεράσματος αυτού είναι ότι όλες οι μαρκοβιανές διαδικασίες οδηγούνται σε μια σταθερή τιμή όταν το $n \to \infty$.

10.2.3 Διαφορικές εξισώσεις[3].

Μια εξίσωση η οποία εμπεριέχει παραγώγους μιας η και περισσοτέρων εξαρτημένων μεταβλητών ως προς μια ή περισσοτέρους ανεξάρτητες μεταβλητές ονομάζεται *διαφορική εξίσωση*. Ένα από τα απλούστερα είδη διαφορικών εξισώσεων είναι αυτό της μορφής :

$$f'(x) = af(x), a \in \mathbb{R}$$

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{ax}}$. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι :

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{ax}}\right)' = \frac{f'(x)e^{ax} - f(x)ae^{ax}}{\left(e^{ax}\right)^2} = \frac{\left(f'(x) - af(x)\right)e^{ax}}{\left(e^{ax}\right)^2} = 0$$

Συνεπώς η συνάρτηση $g(x)$ είναι σταθερή δηλ. $g(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς

$$g(x) = c = \frac{f(x)}{e^{ax}} \Rightarrow f(x) = ce^{ax}$$

Επειδή $f(0) = ce^{a0} = c$ θα έχουμε ότι

$$f(x) = e^{ax} f(0)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να λύσουμε την πιο γενική μορφή της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης :

$$y'(x) = Ay(x)$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}$$

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων, υπολογίζουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $T \in M_n[\mathbb{R}](M_n[\mathbb{C}])$ τέτοιο ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT = D$ να είναι διαγώνιος. Ο πίνακας $T \in M_n[\mathbb{R}](M_n[\mathbb{C}])$ είναι ο πίνακας των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A. Μπορούμε τότε να παρατηρήσουμε ότι :

$$y'(x) = Ay(x) \overset{\times T^{-1}}{\Rightarrow} T^{-1}y'(x) = T^{-1}Ay(x) \underset{y'(x)=Tz'(x)}{\overset{y(x)=Tz(x)}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow T^{-1}Tz'(x) = T^{-1}ATz(x) \Rightarrow z'(x) = Dz(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ \vdots \\ z_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ z_i'(x) = \lambda_i z_i(x), i = 1, 2, ..., n \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ z_i(x) = e^{\lambda_i x} z_i(0), i = 1, 2, ..., n \right\} \Rightarrow$$

και συνεπώς η λύση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων είναι η εξής:

---

[3] Μπορείς να επανέλθεις στο κεφάλαιο αυτό όταν θα έχεις μελετήσει το κεφάλαιο 13 του 2[ου] τόμου του ΣΕΥ.

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} z_1(0) \\ e^{\lambda_2 x} z_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n x} z_n(0) \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix} \overset{y(0)=Tz(0)\Rightarrow}{\underset{z(0)=T^{-1}y(0)}{\Longrightarrow}}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} T^{-1}\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 10.2.3.1

Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = 3y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + 3y_2(x) \\ y_3'(x) = -y_1(x) - y_2(x) + 2y_3(x) \end{cases}$$

όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή x *και ισχύει* $y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1$

Απάντηση

Θέτοντας $y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{bmatrix}^T$ και $\dfrac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \end{bmatrix}^T$ το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$\frac{dY}{dx} = AY \text{, όπου } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσοντας ως προς την $3^η$ στήλη προκύπτει

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)[(\lambda-3)^2-1] = (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

Οι ιδιοτιμές (ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) είναι το 4 και το 2 με αλγεβρικές πολλαπλότητες 1 και 2 αντίστοιχα. Ο ιδιοχώρος V_4 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 4$ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$(4I - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

Επομένως

$$V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ο ιδιοχώρος V_2 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$(2I - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

Επομένως τα διανύσματα του ιδιοχώρου είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + 0x_3 \\ x_2 + 0x_3 \\ 0x_2 + x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής ισούται με την γεωμετρική της πολλαπλότητα. Άρα ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Θεώρημα 10.1.8).
Αν θέσουμε

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε γνωρίζουμε ότι ο πίνακας T είναι αντιστρέψιμος και

$$T^{-1}AT = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ με } T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας την φόρμουλα επίλυσης που αναφέραμε παραπάνω θα έχουμε :

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} e^{4x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{4x} + e^{2x} \\ e^{4x} - e^{2x} \\ -e^{4x} + 2e^{2x} \end{bmatrix}$$

Το παραπάνω σύστημα θα μπορούσε να λυθεί με την συνάρτηση DSolve του Mathematica ως εξής :

```
DSolve[{y1'[x] == 3 y1[x] + y2[x], y2'[x] == y1[x] + 3 y2[x], y3'[x] == -y1[x] - y2[x] + 2 y3[x],
  y1[0] == 2, y2[0] == 0, y3[0] == 1}, {y1[x], y2[x], y3[x]}, x]
{{y1[x] → e^(2x) (1 + e^(2x)), y2[x] → e^(2x) (-1 + e^(2x)), y3[x] → -e^(2x) (-2 + e^(2x))}}
```

■

10.2.4 Επίλυση της εξίσωσης $X^k = A$

Προκειμένου να επιλύσουμε την εξίσωση πινάκων $X^k = A$ όπου $A \in M_n[\mathbb{R}]$ πίνακας ο οποίος διαγωνιοποιείται, υπολογίζουμε τον πίνακα P των ιδιοδιανυσμάτων για τον οποίο ισχύει $D = P^{-1}AP$ ή ισοδύναμα $A = PDP^{-1}$ και συνεπώς έχουμε να επιλύσουμε την ισοδύναμη σχέση :

$$X^k = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}X^kP = D \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(P^{-1}XP\right)\left(P^{-1}XP\right)\cdots\left(P^{-1}XP\right) = D \Leftrightarrow$$
$$\underbrace{\left(P^{-1}XP\right)}_{Y}{}^{k} = D$$

Επιλύουμε λοιπόν την $Y^k = D$ ως προς Y, η οποία μπορεί να περιέχει και άπειρες λύσεις, και στο τέλος οι λύσεις μας θα είναι της μορφής $X = PYP^{-1}$ (γιατί;).

Παράδειγμα 10.2.4.1

Ναεπιλύσετε την εξίσωση

$$X^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -16 & -50 \\ 10 & 29 \end{pmatrix}}_{A}, \quad X \in M_2[\mathbb{R}]$$

Απάντηση

Βήμα 1^o. Υπολογίζουμε τον πίνακα P των ιδιοδιανυσμάτων για τον οποίο ισχύει $D = P^{-1}AP$. Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές τις 9, 4 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $(-2,1)^T, (-5,2)^T$. Συνεπώς ο πίνακας P είναι ο παρακάτω :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

και

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}{}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} -16 & -50 \\ 10 & 29 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}$$

Βήμα 2^o. Θεωρώ τον μετασχηματισμό $Y = P^{-1}XP$ και υπολογίζω την λύση της εξίσωσης : $Y^2 = D$:

$$Y = \begin{pmatrix} \pm 3 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3^o. Υπολογίζω την λύση της αρχικής εξίσωσης $X = PYP^{-1}$

$$X = PYP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 3 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)(\pm 3) & (-5)(\pm 2) \\ \pm 3 & 2(\pm 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-4)(\pm 3) + 5(\pm 2) & (-10)(\pm 3) + 10(\pm 2) \\ 2(\pm 3) - 2(\pm 2) & 5(\pm 3) - 4(\pm 2) \end{pmatrix}$$

Συνεπώς οι λύσεις που θα πάρουμε για τους πιθανούς συνδυασμούς των προσήμων θα είναι οι παρακάτω :

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} -22 & -50 \\ 10 & 23 \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} 22 & 50 \\ -10 & -23 \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

```
In[1]:= a = {{-16, -50}, {10, 29}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} -16 & -50 \\ 10 & 29 \end{pmatrix}$

```
In[2]:= x = {{x1, x2}, {x3, x4}}
```

Out[2]= $\begin{pmatrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{pmatrix}$

```
In[3]:= Solve[x.x == a, {x1, x2, x3, x4}]
```

Out[3]= $\{\{x1 \to -22, x4 \to 23, x2 \to -50, x3 \to 10\}, \{x1 \to -2, x4 \to 7, x2 \to -10, x3 \to 2\},$
$\{x1 \to 2, x4 \to -7, x2 \to 10, x3 \to -2\}, \{x1 \to 22, x4 \to -23, x2 \to 50, x3 \to -10\}\}$ ■

Ασκήσεις 10.2

1. Να υπολογιστεί η ν-οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει το ποσοστό μετακίνησης φοιτητών μεταξύ Πανεπιστήμιων λόγω μετεγγραφών.

	Πανεπιστήμιο Πατρών	Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών	Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πανεπιστήμιο Πατρών	70%	15%	15%
Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών	5%	80%	15%
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης	5%	20%	75%

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των φοιτητών παραμένει σταθερός (δεν προσθέτουμε δηλαδή τον πληθυσμό των φοιτητών που εγγράφεται κάθε χρονιά) τι ποσοστό των φοιτητών παραμένει σε κάθε Πανεπιστήμιο μετά από 2,3,4,... χρόνια;

3. Προσπάθησε να λύσεις την παρακάτω εξίσωση διαφορών
$$F_{k+2} = 5F_{k+1} - 6F_k$$
όπου $F_1 = F_2 = 1$.
Σημείωση. Θέσε $x_k = F_k, y_k = F_{k+1} = x_{k+1}$ και προσπάθησε να γράψεις τις εξισώσεις που προκύπτουν ως
$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$
όπου $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

4. Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:
$$\begin{cases} y_1'(x) = -2y_1(x) + 3y_2(x) \\ y_2'(x) = -y_1(x) + 2y_2(x) \end{cases}$$
όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή x και ισχύει $y_1(2) = 2, y_2(2) = 4$

5. Προσπαθήστε να λύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση :
$$y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$$
όπου $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$.
Υπόδειξη. Ορίστε τις νέες μεταβλητές
$$y_1(x) = y(x)$$
$$y_2(x) = y'(x) = y_1'(x)$$
$$y_3(x) = y''(x) = y_2'(x)$$
και σχηματίστε ένα σύστημα 3 διαφορικών εξισώσεων με 3 άγνωστες συναρτήσεις ($y_1(x), y_2(x), y_3(x)$).

6. Να επιλύσετε την εξίσωση
$$X^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}}_{A}, \ X \in M_2[\mathbb{R}]$$

7. Για ποιες τιμές των *a,b,c,d* ο πίνακας *A* διαγωνιοποιείται
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Λύσεις ασκήσεων 10.2

1. Δημιουργώ τον πίνακα ιδιοδιανυσμάτων P του πίνακα A

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

και άρα

$$D=\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=P^{-1}AP\Rightarrow A=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{P}^{-1}\Rightarrow$$

$$A^n=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^{n}}_{D^n}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{P}^{-1}\Rightarrow$$

$$A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\left(2^{n+1}+8^n\right) & \frac{1}{3}\left(-2^n+8^n\right) & \frac{1}{3}\left(-2^n+8^n\right)\\ \frac{1}{3}\left(-2^n+8^n\right) & \frac{1}{3}\left(2^{n+1}+8^n\right) & \frac{1}{3}\left(-2^n+8^n\right)\\ \frac{1}{3}\left(-2^n+8^n\right) & \frac{1}{3}\left(-2^n+8^n\right) & \frac{1}{3}\left(2^{n+1}+8^n\right)\end{pmatrix}$$

```
In[1]:= a = {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

```
In[2]:= MatrixPower[a, n] // Simplify
```

Out[2]= $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(2^{n+1}+8^n) & \frac{1}{3}(-2^n+8^n) & \frac{1}{3}(-2^n+8^n)\\ \frac{1}{3}(-2^n+8^n) & \frac{1}{3}(2^{n+1}+8^n) & \frac{1}{3}(-2^n+8^n)\\ \frac{1}{3}(-2^n+8^n) & \frac{1}{3}(-2^n+8^n) & \frac{1}{3}(2^{n+1}+8^n)\end{pmatrix}$

■

2.

Έστω $x_k(i)$ η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να είναι στο Πανεπιστήμιο *k* στο τέλος του χρόνου *i*, και p_{ij} η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού που βρίσκεται στο Πανεπιστήμιο i να είναι στο Πανεπιστήμιο j στην επόμενη χρονική παρατήρηση. Εύκολα παρατηρούμε ότι :

$$\begin{aligned} x_1(i) &= \frac{70}{100}x_1(i-1)+\frac{5}{100}x_2(i-1)+\frac{5}{100}x_3(i-1) \\ x_2(i) &= \frac{15}{100}x_1(i-1)+\frac{80}{100}x_2(i-1)+\frac{20}{100}x_3(i-1) \\ x_3(i) &= \frac{15}{100}x_1(i-1)+\frac{15}{100}x_2(i-1)+\frac{75}{100}x_3(i-1) \end{aligned}$$

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix}}_{x_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{70}{100} & \frac{5}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{15}{100} & \frac{80}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{15}{100} & \frac{15}{100} & \frac{75}{100} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i-1) \\ x_2(i-1) \\ x_3(i-1) \end{bmatrix}}_{x_{i-1}}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.2.1 είναι :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}}_{x_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{70}{100} & \frac{5}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{15}{100} & \frac{80}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{15}{100} & \frac{15}{100} & \frac{75}{100} \end{bmatrix}^n}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}}_{x_0}$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα A^n εφαρμόζουμε την μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας και έχουμε :

Βήμα 1. Ιδιοτιμές του πίνακα A : $\left\{1,\frac{13}{20},\frac{3}{5}\right\}$. Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι απλές (έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1), ο πίνακας διαγωνιοποιείται.

```
In[1]:= a = {{70 / 100, 5 / 100, 5 / 100},
  {15 / 100, 80 / 100, 20 / 100},
  {15 / 100, 15 / 100, 75 / 100}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

```
In[2]:= Eigenvalues[a]
```

Out[2]= $\left\{1, \frac{13}{20}, \frac{3}{5}\right\}$

Βήμα 2. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 8/21 \\ 9/7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

```
In[3]:= Eigenvectors[a]
```

Out[3]= $\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{9}{7} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Βήμα 3. Σχηματίζω τον πίνακα $T \in R^{3\times 3}$ που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α.

$$T = \begin{bmatrix} 8/21 & -1 & 0 \\ 9/7 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
In[4]:= t = Transpose[%]
```

Out[4]= $\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & -1 & 0 \\ \frac{9}{7} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Βήμα 4. Τότε

$$S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 13/20 & 0\\ 0 & 0 & 3/5\end{bmatrix}=T^{-1}AT \Rightarrow A^{n}=TS^{n}T^{-1}\Rightarrow$$

$$A^{n}=\begin{bmatrix}8/21 & -1 & 0\\ 9/7 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{n} & 0 & 0\\ 0 & \left(13/20\right)^{n} & 0\\ 0 & 0 & \left(3/5\right)^{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8/21 & -1 & 0\\ 9/7 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το όριο της παραπάνω δύναμης όταν $n\to\infty$ θα είναι ο πίνακας ($\lim_{n\to\infty}\left(13/20\right)^{n}=0, \lim_{n\to\infty}\left(3/5\right)^{n}=0$) :

$$\lim_{n\to\infty}A^{n}=\begin{bmatrix}8/21 & -1 & 0\\ 9/7 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8/21 & -1 & 0\\ 9/7 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1/7 & 1/7 & 1/7\\ 27/56 & 27/56 & 27/56\\ 3/8 & 3/8 & 3/8\end{bmatrix}$$

```
In[5]:= MatrixPower[a, n] // Simplify
```

Out[5]=
$$\begin{pmatrix}\frac{1}{7}+\frac{3}{7}\,2^{1-2n}\left(\frac{13}{5}\right)^{n} & \frac{1}{7}\left(1-\left(\frac{13}{20}\right)^{n}\right) & \frac{1}{7}\left(1-\left(\frac{13}{20}\right)^{n}\right)\\ \frac{3}{56}\left(9+7\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-\left(\frac{13}{5}\right)^{n}4^{2-n}\right) & \frac{27}{56}+\frac{1}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n}+\frac{1}{8}\,3^{n+1}\,5^{-n} & \frac{27}{56}+\frac{1}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n}-\frac{1}{8}\,3^{n}\,5^{1-n}\\ -\frac{3}{8}\left(-1+\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right) & -\frac{3}{8}\left(-1+\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right) & \frac{1}{8}\left(3+3^{n}\,5^{1-n}\right)\end{pmatrix}$$

Το όριο του παραπάνω πίνακα όταν $n\to\infty$ είναι :

```
In[6]:= Limit[MatrixPower[a, n], n→ Infinity]
```

Out[6]=
$$\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{27}{56} & \frac{27}{56} & \frac{27}{56}\\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}\end{pmatrix}$$

Επειδή $x_k(i)$,k=1,2,3 αποτελούν την πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να παραμείνει στο Πανεπιστήμιο 1, 2, και 3 αντίστοιχα, συνεπώς $x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)=1$, όποιες και αν είναι οι πιθανότητες αυτές. Συνεπώς η λύση της εξίσωσης διαφορών καθώς το $n\to\infty$ θα είναι :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A^n x_0 = \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 27/56 & 27/56 & 27/56 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/7 \\ 27/56 \\ 3/8 \end{bmatrix} \left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) \right) = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 27/56 \\ 3/8 \end{bmatrix}$$

■

3. Μετά τον μετασχηματισμό θα πάρουμε το σύστημα

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}}_{z_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}}_{z_k}, \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}_{z_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

που έχει λύση την

$$z_k = A^k z_0 = A^{k-1} A z_0 = A^{k-1} z_1$$

ή ισοδύναμα την

$$z_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k - 3^{k-1} \\ 2^{k+1} - 3^k \end{pmatrix} \Rightarrow F_k = 2^k - 3^{k-1}$$

```
In[1]:= RSolve[{f[k+2] == 5 f[k+1] - 6 f[k], f[1] == 1, f[2] == 1}, f[k], k]
```

Out[1]= $\left\{\left\{ f(k) \to \frac{1}{3}(3\,2^k - 3^k) \right\}\right\}$

■

4. Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}}_{z'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}}_{z(x)}, \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{pmatrix}}_{z(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

το οποίο και έχει λύση την

$$z(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^{Ax} z(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-x} \left(3\left(-1+e^{2x}\right) y_2(0) - \left(-3+e^{2x}\right) y_1(0) \right) \\ -\frac{1}{2} e^{-x} \left(\left(-1+e^{2x}\right) y_1(0) - 3e^{2x} y_2(0) + y_2(0) \right) \end{pmatrix}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες $y_1(2)=2, y_2(2)=4$ που θα πρέπει να ικανοποιούνται

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-2} \left(3\left(-1+e^{4}\right) y_2(0) - \left(-3+e^{4}\right) y_1(0) \right) \\ -\frac{1}{2} e^{-2} \left(\left(-1+e^{4}\right) y_1(0) - 3e^{4} y_2(0) + y_2(0) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5-3e^4}{e^2} \\ \frac{5-e^4}{e^2} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς η λύση που αναζητούμε είναι η

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x-2}\left(-3e^4+5e^{2x}\right) \\ e^{-x-2}\left(-e^4+5e^{2x}\right) \end{pmatrix}$$

In[1]:=
```
DSolve[
  {D[y1[x], x] == -2 y1[x] + 3 y2[x],
   D[y2[x], x] == -y1[x] + 2 y2[x],
   y1[2] == 2,
   y2[2] == 4},
  {y1[x], y2[x]}, x]
```

Out[1]= $\{\{y_1(x) \to e^{-x-2}(-3e^4+5e^{2x}),\ y_2(x) \to e^{-x-2}(-e^4+5e^{2x})\}\}$ ■

5. Μετά τον μετασχηματισμό

$$y_1(x) = y(x)$$
$$y_2(x) = y'(x) = y_1'(x)$$
$$y_3(x) = y''(x) = y_2'(x)$$

θα έχουμε

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix}}_{z'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}}_{z(x)},\ \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}}_{z(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

η οποία έχει ως λύση την

$$z(x) = e^{Ax} z(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} \\ \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} \end{pmatrix}$$

και άρα

$$y(x) = y_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$$

In[1]:=
```
DSolve[
  {y'''[x] - 2 y''[x] - y'[x] + 2 y[x] == 0,
   y[0] == 1,
   y'[0] == 0,
   y''[0] == 1},
  y[x], x]
```

Out[1]= $\left\{\left\{y(x) \to \frac{1}{2} e^{-x}(1+e^{2x})\right\}\right\}$ ■

6. **Βήμα 1°.** Υπολογίζουμε τον πίνακα P των ιδιοδιανυσμάτων για τον οποίο ισχύει $D = P^{-1}AP$. Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές τις 4, 1 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $(-1,2)^T, (-1,1)^T$. Συνεπώς ο πίνακας P είναι ο παρακάτω :
$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
και
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$
Βήμα 2°. Θεωρώ τον μετασχηματισμό $Y = P^{-1}XP$ και υπολογίζω την λύση της εξίσωσης : $Y^2 = D$:
$$Y = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$
Βήμα 3°. Υπολογίζω την λύση της αρχικής εξίσωσης $X = PYP^{-1}$
$$X = PYP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)(\pm 2) & (-1)(\pm 1) \\ 2(\pm 2) & (\pm 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)(\pm 2) + 2(\pm 1) & (-1)(\pm 2) + (\pm 1) \\ 2(\pm 2) - 2(\pm 1) & 2(\pm 2) - 1(\pm 1) \end{pmatrix}$$
Συνεπώς οι λύσεις που θα πάρουμε για τους πιθανούς συνδυασμούς των προσήμων θα είναι οι παρακάτω :
$$X = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

In[1]:= `a = {{-2, -3}, {6, 7}}`

Out[1]= $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

In[2]:= `x = {{x1, x2}, {x3, x4}}`

Out[2]= $\begin{pmatrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{pmatrix}$

In[3]:= `Solve[x.x == a, {x1, x2, x3, x4}]`

Out[3]= $\{\{x1 \to -4, x4 \to 5, x2 \to -3, x3 \to 6\}, \{x1 \to 0, x4 \to -3, x2 \to 1, x3 \to -2\},$
$\{x1 \to 0, x4 \to 3, x2 \to -1, x3 \to 2\}, \{x1 \to 4, x4 \to -5, x2 \to 3, x3 \to -6\}\}$ ■

7. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$. Όταν το πολυώνυμο αυτό έχει διακεκριμένες ρίζες και συνεπώς η διακρίνουσα του είναι διάφορη του μηδενός, $D = (a+d)^2 - 4(ad - bc) \neq 0$ τότε ο πίνακας A πάντα

διαγωνιοποιείται στο $\mathbb{C}$ (ενώ διαγωνιοποιείται στο $\mathbb{R}$ μόνο όταν $D=(a+d)^2-4(ad-bc)>0$). Στην περίπτωση που η διακρίνουσα είναι μηδέν $D=(a+d)^2-4(ad-bc)=0$ τότε έχουμε μια διπλή ρίζα την $\lambda=\frac{a+d}{2}$. Για $\lambda=\frac{a+d}{2}$ έχουμε το σύστημα :

$$\begin{pmatrix} \frac{a+d}{2}-a & -b \\ -c & \frac{a+d}{2}-d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{d-a}{2} & -b \\ -c & -\frac{d-a}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος θα πρέπει να μας οδηγήσει σε 2 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα προκειμένου η ιδιοτιμή $\lambda=\frac{a+d}{2}$ να έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 2 και συνεπώς θα πρέπει :

$$2-rank_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix} \frac{d-a}{2} & -b \\ -c & -\frac{d-a}{2} \end{pmatrix}=2 \Leftrightarrow rank_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix} \frac{d-a}{2} & -b \\ -c & -\frac{d-a}{2} \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{d-a}{2}=0 \\ -c=0 \\ -b=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{a=d, c=0, b=0\}$$

Συνεπώς θα έχουμε 2 περιπτώσεις για τις οποίες διαγωνιοποιείται ο πίνακας A:

(α) $D=(a+d)^2-4(ad-bc)\neq 0$

(β) $\{a=d, c=0, b=0\}$

Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις ο πίνακας δεν διαγωνιοποιείται. ■

10.3. Διαγωνιοποίηση ειδικής κατηγορίας πινάκων

10.3.1. Πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες (Real symmetric matrices)

Ορισμός 10.3.1.1

*Ένας πραγματικός πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}]$ λέγεται **συμμετρικός** αν είναι ίσος με τον ανάστροφο του δηλ. αν $A = A^T$.* ■

Είναι προφανές από τον παραπάνω ορισμό ότι η έννοια του συμμετρικού και ερμητιανού πίνακα ταυτίζονται στην περίπτωση των πραγματικών πινάκων και συνεπώς έχουν τις ίδιες ιδιότητες.

Παράδειγμα 10.3.1.2

Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3[\mathbb{R}]$$

είναι συμμετρικός εφόσον $A = A^T$ ή αλλιώς $a_{ij} = a_{ji}$. ■

Θεώρημα 10.3.1.3

Εάν $A \in M_n[\mathbb{R}]$ είναι πραγματικός συμμετρικός πίνακας, τότε :

(α) οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικές,

(β) τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A μπορούν να επιλεγούν ώστε να έχουν πραγματικές ιδιοτιμές,

(γ) τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους,

(δ) ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος,

(ε) τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A μπορούν κατάλληλα να επιλεγούν ώστε να αποτελέσουν μια ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη.

(α) Ας θεωρηθεί ότι ο πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}]$ έχει μια ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ τέτοιο ώστε $Ax = \lambda x$. Παρατηρούμε ότι

$$\overline{x}^T (Ax) = \overline{x}^T (\lambda x) = \lambda \overline{x}^T x$$

Επειδή γενικά ισχύει η σχέση $u^T v = v u^T$ για κάθε $u, v \in \mathbb{C}^n$, θα έχουμε και $\overline{x}^T (Ax) = (Ax)^T \overline{x}$. Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση αυτή θα έχουμε :

$$\lambda \overline{x}^T x = \overline{x}^T (Ax) = (Ax)^T \overline{x} = x^T A^T \overline{x} \overset{A^T = A}{=} x^T A \overline{x}$$

Επειδή ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ θα έχουμε $Ax = \lambda x \Rightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x} \Rightarrow A\overline{x} = \overline{\lambda}\,\overline{x}$ και συνεπώς η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\lambda\overline{x}^T x = x^T A\overline{x} \overset{A\overline{x}=\overline{\lambda}\overline{x}}{=} x^T\overline{\lambda}\overline{x} = \overline{\lambda}x^T\overline{x} \overset{x^T\overline{x}=\overline{x}^T x}{=} \Rightarrow \left(\lambda-\overline{\lambda}\right)\overline{x}^T x = 0$$

Επειδή όμως το $x \neq 0$ θα έχουμε $x^T x \neq 0$ και συνεπώς $\lambda-\overline{\lambda}=0 \Rightarrow \lambda=\overline{\lambda}$ το οποίο αποδεικνύει ότι ο αριθμός λ είναι πραγματικός. ■

(β) Έστω ότι στην ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $x = a+bi$, τότε θα δείξουμε ότι το διάνυσμα $x+\overline{x} = (a+bi)+(a-bi) = 2a \in \mathbb{R}$ αποτελεί επίσης ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή. Παρατήρησε ότι $A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\overline{x} = \lambda\overline{x}$ και συνεπώς $A\left(x+\overline{x}\right) = Ax + A\overline{x} = \lambda x + \lambda\overline{x} = \lambda\left(x+\overline{x}\right)$.

(γ) Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ δηλ. $Ax = \lambda x, Ay = \mu y$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x, y είναι μηδέν. Παρατηρώ ότι :

$$0 = x^T\left(A-A^T\right)y = x^T Ay - x^T A^T y = x^T\left(Ay\right)-\left(Ax\right)^T y \underset{Ax=\lambda x}{\overset{Ay=\mu y}{=}} x^T\left(\mu y\right)-\left(\lambda x\right)^T y = \left(\lambda-\mu\right)x^T y$$

όπου $x^T y \neq 0$ επειδή $x \neq 0, y \neq 0$. Συνεπώς $\lambda-\mu=0 \Rightarrow \lambda=\mu$.

(δ) Στον Τόμο Α', φασματικό θεώρημα 6.3 σελ.117.

(ε) Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Gram-Schmidt για να δημιουργήσουμε μια ορθοκανονική βάση για τα ιδιοδιανύσματα του ιδιοχώρου που δημιουργείται από κάθε διαφορετική ιδιοτιμή του πίνακα A. Οι βάσεις που θα δημιουργήσουμε με τον τρόπο αυτό θα είναι κάθετες μεταξύ τους σύμφωνα με την πρόταση (γ). ■

Παράδειγμα 10.3.1.4

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3\left[\mathbb{R}\right]$$

Ο πίνακας A είναι συμμετρικός, με πραγματικές ιδιοτιμές $\left\{6, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$ όπως άλλωστε θα περιμέναμε από το Θεώρημα 10.3.1.3α. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

έχουν πραγματικές τιμές (Θεώρημα 10.3.1.3β) και είναι κάθετα μεταξύ τους :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

■

Έστω ο πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}]$ είναι συμμετρικός (δηλ. $A = A^T$). Τότε σύμφωνα με το θεώρημα που διατυπώθηκε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε πάντα n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τα οποία να είναι κάθετα μεταξύ τους. Μπορούμε επιπλέον να κανονικοποιήσουμε τα μήκη τους σε 1. Συνεπώς μπορούμε πάντα να επιλέξουμε τα n ιδιοδιανύσματα $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ του πίνακα A να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του R^n. Ας θεωρήσουμε τον πίνακα Q ο οποίος έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ π.χ. $Q = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$. Τότε

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^T x_1 & x_1^T x_2 & \cdots & x_1^T x_n \\ x_2^T x_1 & x_2^T x_2 & \cdots & x_2^T x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^T x_1 & x_n^T x_2 & \cdots & x_n^T x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

ή ισοδύναμα $Q^{-1} = Q^T$. Συνεπώς η διαγωνιοποίηση $T^{-1}AT = D$ με $T = Q, T^{-1} = Q^T$ γίνεται

$$Q^{-1}AQ = D \Leftrightarrow A = QDQ^{-1} \Leftrightarrow A = QDQ^T$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι :

Θεώρημα 10.3.1.7 (Φασματικό Θεώρημα)

Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}]$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί στην μορφή $A = QDQ^T$ - με τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα στον Q και τις ιδιοτιμές στον D. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν υπάρχει πίνακας $Q \in M_n[\mathbb{R}]$ με την ιδιότητα $QQ^T = Q^T Q = I_n$, τέτοιος ώστε $A = QDQ^T$ όπου ο πίνακας D είναι διαγώνιος, τότε ο πίνακας A θα είναι συμμετρικός. Η παραγοντοποίηση αυτή του πίνακα $A = QDQ^T$ είναι γνωστή και ως Schur παραγοντοποίηση (Schur decomposition ή Schur factorization). ■

Αλγόριθμος Schur παραγοντοποίησης συμμετρικού πίνακα $A = QDQ^T$

Βήμα 1^o. Υπολόγισε τις ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\}$ και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους $\{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, ..., V_{\lambda_k}\}$ του πίνακα.

Βήμα 2^o. Μετέτρεψε την βάση του κάθε ιδιοχώρου V_{λ_i} σε ορθοκανονική χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt.

Βήμα 3^o. Σχημάτισε τον πίνακα Q από τα διανύσματα της ορθοκανονικοποιημένης βάσης των V_{λ_i}.

Παράδειγμα 10.3.1.8

Θεωρείστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3[\mathbb{R}]$$

με τα κάθετα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

τα οποία μπορούν να ορθοκανονικοποιηθούν ώστε να έχουν μήκος 1 (το πρώτο ιδιοδιάνυσμα έχει μήκος $\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ και συνεπώς διαιρούμε όλα τα στοιχεία του πρώτου ιδιοδιανύσματος με $\sqrt{3}$, ενώ όμοια δουλεύουμε με τα υπόλοιπα 2 ιδιοδιανύσματα)

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Άρα θα έχουμε

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}&\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\ 1/\sqrt{3}&\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}&\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\ 1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}}_{Q}\underbrace{\begin{bmatrix}6&0&0\\0&-\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{3}\end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}&\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}&1/\sqrt{3}\\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}&\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}}_{Q^T}$$

■

10.3.2 Ερμητιανοί πίνακες (Hermitian matrices)

Ορισμός 10.3.2.1

Ένας μιγαδικός πίνακας $A\in M_n[\mathbb{C}]$ λέγεται ***ερμητιανός*** *αν είναι ίσος με τον συζυγή ανάστροφο του δηλ. αν $A=A^H$.* ■

Παράδειγμα 10.3.2.2

Ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix}2&1+i&2-i\\1-i&4&3-2i\\2+i&3+2i&1-i\end{pmatrix}\in M_3[\mathbb{C}]$$

είναι ερμητιανός διότι $A = A^H$ *ή* $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$[4]. ■

Οι ιδιότητες που αναφέραμε για τους πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες ισχύουν και για τους ερμητιανούς πίνακες.

Θεώρημα 10.3.2.3

Εάν $A \in M_n[\mathbb{C}]$ *είναι ερμητιανός πίνακας, τότε :*

(α) οι ιδιοτιμές του πίνακα Α είναι πραγματικές,

(β) τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους,

(γ) ο πίνακας Α είναι διαγωνιοποιήσιμος,

(δ) τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α μπορούν κατάλληλα να επιλεγούν ώστε να αποτελέσουν μια ορθοκανονική βάση. ■

Παρατήρησε σε αντίθεση με το θεώρημα για τους πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες, όταν ο πίνακας είναι μιγαδικός δεν μπορούμε να επιλέξουμε πάντα τα ιδιοδιανύσματα να έχουν πραγματικές τιμές (ποιο σημείο της απόδειξης δεν ισχύει ;).

Παράδειγμα 10.3.2.4

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 1 & i \\ 2 & -i & 1 \end{pmatrix} \in M_3[\mathbb{C}]$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα Α είναι $\{3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

```
a = {{1, I, 2}, {-I, 1, I}, {2, -I, 1}}
{{1, i, 2}, {-i, 1, i}, {2, -i, 1}}
Eigenvalues[a]
{3, -√3, √3}
```

ενώ τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα είναι

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -i\left(-1+\sqrt{3}\right) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ i\left(1+\sqrt{3}\right) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

```
Eigenvectors[a] // FullSimplify
{{1, 0, 1}, {-1, -i (-1 + √3), 1}, {-1, i (1 + √3), 1}}
```

Παρατήρησε ότι τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. ■

Το φασματικό θεώρημα γενικεύεται ως εξής :

---

[4] Ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $x = a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, είναι ο $\overline{x} = a - bi$ (δες κεφάλαιο 1 του ΣΕΥ)..

Θεώρημα 10.3.2.5 (Φασματικό Θεώρημα)

Ένας ερμητιανός πίνακας $A \in M_n\left[\mathbb{C}\right]$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί στην μορφή $A = QDQ^*$ - με τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα στον Q και τις ιδιοτιμές στον D. Ο πίνακας Q^* είναι ο συζυγής ανάστροφος του πίνακα Q. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν υπάρχει πίνακας $Q \in M_n\left[\mathbb{C}\right]$ με την ιδιότητα $QQ^* = Q^*Q = I_n$, τέτοιος ώστε $A = QDQ^T$ όπου ο πίνακας D είναι διαγώνιος, τότε ο πίνακας A θα είναι συμμετρικός. Η παραγοντοποίηση αυτή του πίνακα $A = QDQ^T$ είναι γνωστή και ως Schur παραγοντοποίηση (Schur decomposition ή Schur factorization). ■

10.3.3 Ορθογώνιοι πίνακες (orthogonal matrices)

Ορισμός 10.3.3.1

Ένας πίνακας $A \in M_n\left[\mathbb{R}\right]$ λέγεται ***ορθογώνιος*** *αν είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του ταυτίζεται με τον ανάστροφο του δηλ. $A^{-1} = A^T$.* ■

Παράδειγμα 10.3.3.2

Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in M_2\left[\mathbb{R}\right]$$

είναι ορθογώνιος γιατί

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow A^{-1} = A^T$$

■

Μερικές από τις ιδιότητες των ορθογώνιων πινάκων αναφέρονται στο παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 10.3.3.3

(α) Η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα $A \in M_n\left[\mathbb{R}\right]$ είναι ίση με ± 1.

(β) Ένας πραγματικός πίνακας είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν οι στήλες του αποτελούν μια ορθοκανονική βάση.

(γ) Οι ιδιοτιμές ενός ορθογωνίου πίνακα έχουν απόλυτη τιμή ίση με την μονάδα πρδ. $|\lambda| = 1$.

(δ) Τα ιδιοδιανύσματα ενός ορθογώνιου πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.

(ε) Το γινόμενο δύο ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

Απόδειξη.
(α) Γνωρίζουμε ότι $\det[A]=\det\left[A^T\right]$ και επίσης $AA^T=I_n$. Από την τελευταία σχέση θα έχουμε

$$\det\left[AA^T\right]=\det[I_n]\Rightarrow\det[A]\times\det\left[A^T\right]=1\overset{\det[A]=\det\left[A^T\right]}{\Rightarrow}\det[A]^2=1\Rightarrow\det[A]=\pm1$$

(β) $(\Leftarrow)$Έστω ο πίνακας $Q=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}$ του οποίου οι στήλες αποτελούν ορθοκανονική βάση δηλ. $x_i\bullet x_j=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$. Τότε

$$Q^TQ=\begin{bmatrix}x_1^T\\x_2^T\\\vdots\\x_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1^Tx_1 & x_1^Tx_2 & \cdots & x_1^Tx_n\\x_2^Tx_1 & x_2^Tx_2 & \cdots & x_2^Tx_n\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\x_n^Tx_1 & x_n^Tx_2 & \cdots & x_n^Tx_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=I_n$$

ή ισοδύναμα $Q^{-1}=Q^T$ και συνεπώς ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος.
$(\Rightarrow)$ Από την παραπάνω σχέση επίσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση $x_i\bullet x_j=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$ και συνεπώς οι στήλες του θα αποτελούν μια ορθοκανονική βάση.
(γ) Έστω ένας ορθογώνιος πίνακας $A\in M_n[\mathbb{R}]$ με ιδιοτιμή $\lambda\in\mathbb{R}$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x\in\mathbb{R}^n, x\neq0$ δηλ. $Ax=\lambda x$. Τότε θα έχουμε :

$$x^Tx\overset{A^TA=I_n}{=}x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)=(\lambda x)^T(\lambda x)=\lambda^2x^Tx\Rightarrow\left(1-\lambda^2\right)x^Tx=0$$

Επειδή όμως $x\neq0\Rightarrow x^Tx\neq0$ άρα $1-\lambda^2=0\Rightarrow|\lambda|=1$.
(δ) Έστω ένας ορθογώνιος πίνακας $A\in M_n[\mathbb{R}]$ με διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ στις οποίες αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $x,y\in\mathbb{R}^n, x\neq0, y\neq0$ δηλ. $Ax=\lambda x$ και $Ay=\mu y$. Για να δείξουμε ότι τα διανύσματα x,y είναι ορθογώνια θα πρέπει να υπολογίσουμε το εσωτερικό τους γινόμενο :

$$x^Ty\overset{A^TA=I_n}{=}x^TA^TAy=(Ax)^T(Ay)\underset{Ay=\mu y}{\overset{Ax=\lambda x}{=}}(\lambda x)^T(\mu y)=\lambda\mu x^Ty\Rightarrow(1-\lambda\mu)x^Ty=0$$

Δεν μπορεί να ισχύει η σχέση $1-\lambda\mu=0$ γιατί από το (γ) κάθε ιδιοτιμή έχει απόλυτη τιμή ίση με την μονάδα και συνεπώς αν ίσχυε αυτή η ισότητα θα είχαμε

$$1-\lambda\mu=0\overset{\times\lambda}{\Rightarrow}\lambda-\lambda^2\mu=0\overset{\lambda^2=1}{\Rightarrow}\lambda-\mu=0\Rightarrow\lambda=\mu$$

το οποίο όμως δεν ισχύει αφού υποθέσαμε ότι οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Συνεπώς θα πρέπει να ισχύει η σχέση $x^Ty=0$ που αποδεικνύει ότι τα ιδιοδιανύσματα x,y είναι ορθογώνια.
(ε) Έστω $Q,R\in M_n[\mathbb{R}]$ ορθογώνιοι πίνακες δηλ. $QQ^T=I_n$ και $RR^T=I_n$. Τότε θα δείξουμε ότι ο πίνακας QR είναι ορθογώνιος. Παρατήρησε ότι

$$QR(QR)^T=QRR^TQ^T\overset{RR^T=I_n}{=}QI_nQ^T\overset{QQ^T=I_n}{=}I_n$$

■

Είδαμε στο Φασματικό Θεώρημα 10.3.1.7 ότι κάθε συμμετρικός πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}]$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $A = QDQ^T$ όπου ο πίνακας $Q \in M_n[\mathbb{R}]$ είναι ορθογώνιος και ο πίνακας $D \in M_n[\mathbb{R}]$ είναι διαγώνιος. Η παραπάνω παραγοντοποίηση συμμετρικών πινάκων μπορεί να γενικευτεί και σε μη συμμετρικούς πίνακες όπως αναφέρεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 10.3.3.4 (Schur)

Έστω $A \in M_n[\mathbb{R}]$, όπου ο A έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές. Τότε υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $Q \in M_n[\mathbb{R}]$ τέτοιος ώστε

$$Q^T AQ = T$$

όπου ο πίνακας $T \in M_n[\mathbb{R}]$ είναι άνω τριγωνικός. ■

Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα όπου αναφέρουμε την μεθοδολογία που εφαρμόζουμε προκειμένου να υπολογίσουμε τους πίνακες Q, T.

Παράδειγμα10.3.3.5

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3[\mathbb{R}]$$

Είναι γνωστό από το παράδειγμα 10.1.11 ότι μια από τις ιδιοτιμές του πίνακα A είναι το $\lambda = -1$ στο οποίο αντιστοιχεί και το ιδιοδιάνυσμα $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα αυτό ώστε να έχει μήκος 1 και συνεπώς να πάρουμε στη θέση του το $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt υπολογίζουμε 2 διανύσματα v, w τέτοια ώστε τα $\{u, v, w\}$ να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση. Αρχικά παρατηρούμε ότι τα διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt έχουμε:

$$u_1 = u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; v_1 = v - \frac{v \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = w - \frac{w \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1} u_1 - \frac{w \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ένας άλλος τρόπος που θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε για να συμπληρώσουμε την βάση σε ορθοκανονική θα ήταν να υποθέσουμε ότι

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

με μέτρα 1

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$$

και κάθετα μεταξύ τους και με το διάνυσμα u,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 = 0, \frac{\sqrt{2}}{2} w_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} w_2 = 0, v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

Λύνοντας το παραπάνω (αρκετά δύσκολο) σύστημα θα πάρουμε :

```
Solve[{v1^2 + v2^2 + v3^2 == 1, w1^2 + w2^2 + w3^2 == 1, v1 + v2 == 0, w1 + w2 == 0, v1 w1 + v2 w2 + v3 w3 == 0},
 {v1, v2, v3, w1, w2, w3}]
Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. More…
```

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big\{v_3\to -1,\ w_3\to 0,\ v_1\to 0,\ v_2\to 0,\ w_2\to -\frac{1}{\sqrt{2}},\ w_1\to \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\},\\
&\Big\{v_3\to -1,\ w_3\to 0,\ v_1\to 0,\ v_2\to 0,\ w_2\to \frac{1}{\sqrt{2}},\ w_1\to -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\},\\
&\Big\{v_3\to 1,\ w_3\to 0,\ v_1\to 0,\ v_2\to 0,\ w_2\to -\frac{1}{\sqrt{2}},\ w_1\to \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\},\\
&\Big\{v_3\to 1,\ w_3\to 0,\ v_1\to 0,\ v_2\to 0,\ w_2\to \frac{1}{\sqrt{2}},\ w_1\to -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\},\\
&\Big\{v_3\to -\sqrt{2}\,w_1,\ w_3\to -\sqrt{1-2w_1^2},\ v_1\to -\frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ v_2\to \frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ w_2\to -w_1\Big\},\\
&\Big\{v_3\to -\sqrt{2}\,w_1,\ w_3\to \sqrt{1-2w_1^2},\ v_1\to \frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ v_2\to -\frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ w_2\to -w_1\Big\},\\
&\Big\{v_3\to \sqrt{2}\,w_1,\ w_3\to -\sqrt{1-2w_1^2},\ v_1\to \frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ v_2\to -\frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ w_2\to -w_1\Big\},\\
&\Big\{v_3\to \sqrt{2}\,w_1,\ w_3\to \sqrt{1-2w_1^2},\ v_1\to -\frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ v_2\to \frac{\sqrt{1-2w_1^2}}{\sqrt{2}},\ w_2\to -w_1\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

Μια λύση εκ των οποίων είναι και αυτή που βρήκαμε με την μέθοδο Gram-Schmidt. Στη συνέχεια σχηματίζουμε τον πίνακα Q που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\{u_1, v_1, w_1\}$:

$$
Q=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

και εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό

$$
Q^T A Q=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -7 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας έχει ήδη γίνει άνω τριγωνικός, γεγονός που δεν συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις. λόγω της επιλογής των διανυσμάτων u, v, w θα έχουμε

$$
u^T A u = u^T \lambda u = \lambda |u| = \lambda
$$

$$
v^T A u = v^T \lambda u = \lambda \left(v^T u\right) = 0
$$

$$
w^T A u = w^T \lambda u = \lambda \left(w^T u\right) = 0
$$

και συνεπώς καταφέραμε να πάρουμε τον πίνακα με την μορφή :

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} u^T Au & u^T Av & u^T Aw \\ v^T Au & v^T Av & v^T Aw \\ w^T Au & w^T Av & w^T Aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & u^T Av & u^T Aw \\ 0 & v^T Av & v^T Aw \\ 0 & w^T Av & w^T Aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

όπου $A_1 \in M_2[\mathbb{R}], a \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία που κάναμε για τον πίνακα A, και στον υποπίνακα A_1. Δηλαδή υπολογίζουμε μια ιδιοτιμή του A_1 π.χ. $\lambda = 2$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $u = [1 \quad 0]^T$ το οποίο είναι ήδη κανονικοποιημένο ώστε να έχει μήκος 1. Υπολογίζω κάνοντας χρήση της μεθόδου Gram-Schmidt ένα δεύτερο διάνυσμα v τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\{u, v\}$ να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι έχουμε $v = [0 \quad 1]^T$ και σχηματίζουμε τον πίνακα S που έχει ως στήλες τα διανύσματα $\{u, v\}$. Θα έχουμε

$$S^T A_1 S = T_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που είναι άνω τριγωνικός. Ορίζουμε λοιπόν τον ορθογώνιο πίνακα

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{S} \end{bmatrix}$$

και συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας

$$R^T Q^T AQR$$

είναι άνω τριγωνικός. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ο ορθογώνιος πίνακας που ψάχνουμε είναι ο QR που είναι ορθογώνιος ως γινόμενο ορθογωνίων πινάκων. Η μέθοδος που αναπτύξαμε παραπάνω μπορεί εύκολα να γενικευτεί σε πίνακες μεγαλυτέρων διαστάσεων.

Το παραπάνω πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί με χρήση της συνάρτησης *SchurDecomposition* του *Mathematica* που επιστρέφει δύο πίνακες q (ορθογώνιος) και t (άνω τριγωνικός) τέτοιους ώστε $q^T aq = t$, όπως φαίνεται παρακάτω.

```
In[1]:= a = {{4, -5, 1}, {2, -3, 1}, {0, 0, -1}}
```

Out[1]= $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ο πίνακας που δέχεται η συνάρτηση *SchurDecomposition* πρέπει να είναι αριθμητικός και αυτός είναι ο λόγος της συνάρτησης N[] που χρησιμοποιείται στην παρακάτω συνάρτηση.

```
In[2]:= {q, t} = SchurDecomposition[N[a]];
```

Ο πίνακας q που επιστρέφεται είναι ο ορθογώνιος πίνακας που αναζητούμε

```
In[3]:= q
```

Out[3]= $\begin{pmatrix} 0.928477 & -0.371391 & 0. \\ 0.371391 & 0.928477 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}$

ενώ ο πίνακας t είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας που αναζητούμε

In[4]:= **t**

Out[4]= $\begin{pmatrix} 2. & -7. & 1.29987 \\ 0. & -1. & 0.557086 \\ 0. & 0. & -1. \end{pmatrix}$

έτσι ώστε $q^T aq = t$

In[5]:= **Transpose[q].a.q - t**

Out[5]= $\begin{pmatrix} 4.44089\times10^{-16} & 0. & 0. \\ -1.11022\times10^{-16} & -2.22045\times10^{-16} & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$

■

10.3.4 Ερμητιανά Ορθογώνιοι Πίνακες (unitary matrices)

Ορισμός 10.3.4.1

*Ένας πίνακας $A \in M_n[\mathbb{C}]$ λέγεται **μοναδιαίος** αν ο αντίστροφος του ταυτίζεται με τον συζυγή ανάστροφο του δηλ. $A^{-1} = A^*$.* ■

Παράδειγμα 10.3.4.2

Ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \in M_2[\mathbb{C}]$$

είναι μοναδιαίος γιατί

$$BB^* = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow B^{-1} = B^*$$ ■

Ανάλογες ιδιότητες με αυτές των ορθογωνίων πινάκων έχουν και οι μοναδιαίοι πίνακες.

Θεώρημα 10.3.4.3

(α) Η ορίζουσα ενός μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με ±1.

(β) Ένας πραγματικός πίνακας είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν οι στήλες του αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathbb{C}^n$.

(γ) Οι ιδιοτιμές ενός μοναδιαίου πίνακα έχουν απόλυτη τιμή ίση με την μονάδα πρδ. $|\lambda| = 1$.

(δ) Τα ιδιοδιανύσματα ενός μοναδιαίου πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.

(ε) Το γινόμενο δύο μοναδιαίων πινάκων είναι μοναδιαίος πίνακας. ■

Ασκήσεις 10.3

1. Υπολογίστε μια ορθομοναδιαία βάση για τον χώρο των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα :
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
Να παραγοντοποιηθεί ο πίνακας στην μορφή $A=QDQ^T$ (Schur παραγοντοποίηση).

2. Αποδείξτε ότι αν ένας πίνακας $P\in M_n\left[\mathbb{R}\right]$ είναι ορθογώνιος τότε :
$$(a)\quad \|Px\|=\|x\|,\forall x\in\mathbb{R}^n$$
$$(b)\quad \langle Px,Py\rangle=\langle x,y\rangle,\forall x,y\in\mathbb{R}^n$$
Δηλαδή το μέτρο και η γωνία 2 διανυσμάτων $x,y\in\mathbb{R}^n$ παραμένει αναλλοίωτο έπειτα από την γραμμική απεικόνιση $f(x)=Px$.

3. (α) Δείξτε ότι ένας άνω τριγωνικός πραγματικός πίνακας είναι ορθομοναδιαίος ($AA^T=I_n$)μόνο αν είναι διαγώνιος.
Υπόδειξη. Δουλέψτε πρώτα για έναν τυχαίο πίνακα 2x2 και στη συνέχεια γενικεύστε τα αποτελέσματα σας.
(β) Δείξτε ότι αν οι πίνακες *A*, *U* είναι ορθογώνιοι τότε και ο πίνακας $T=U^{-1}AU$ είναι ορθογώνιος.
(γ) Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 10.3.3.4 (Schur) και των (α), (β) που δείξατε παραπάνω, αποδείξτε ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας διαγωνιοποιείται.

4. Να εφαρμόσετε την μεθοδολογία του παραδείγματος 10.3.3.5 προκειμένου να υπολογίσετε έναν ορθογώνιο πίνακας $Q\in M_2\left[\mathbb{R}\right]$ τέτοιο ώστε
$$Q^T\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}Q=T$$
όπου ο πίνακας $T\in M_2\left[\mathbb{R}\right]$ είναι άνω τριγωνικός.

Λύσεις ασκήσεων 10.3

1. Υπολογίζουμε μια βάση από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A
$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle;\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

και στη συνέχεια με τη μέθοδο της ορθοκανονικοποίησης του GramSchmidt παίρνω την παρακάτω ορθοκανονική βάση

$$\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}; \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\rangle; \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ο πίνακας Q που ζητάμε θα έχει ως στήλες τα παραπάνω διανύσματα :

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

και θα έχουμε ότι

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Παρακάτω δίνουμε τον τρόπο υπολογισμού του πίνακα Q στο Mathematica.

Βήμα 1^o. Ορίζουμε τον πίνακα A.

```
In[1]:= a = {{2, -2, 1}, {-2, -1, 2}, {1, 2, 2}}
```

$$\text{Out[1]=} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2^o. Καλούμε το πακέτο "Orthogonalization" που ανήκει στο πακέτο "LinearAlgebra" και το οποίο διαθέτει συναρτήσεις για την ορθοκανονικοποίηση των διανυσμάτων μιας βάσης.

```
In[2]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

Βήμα 3^o. Υπολογίζουμε τον πίνακα Q ορθοκανονικοποιόντας την βάση που προκύπτει από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A (η ορθοκανονικοποίηση γίνεται με την μέθοδο GramSchmidt).

```
In[3]:= q = Transpose[GramSchmidt[Eigenvectors[a]]]
```

$$\text{Out[3]=} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Βήμα 4^o. Υπολογίζουμε τον διαγώνιο πίνακα D.

```
In[4]:= Transpose[q].a.q // Simplify
```

$$\text{Out[4]=} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

■

2. Αν $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ορθογώνιος τότε :

$$(a)\quad \|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = (Px)^T (Px) = x^T P^T P x \overset{P^T P = I}{=} x^T x = \|x\|^2$$

$$(b)\quad \langle Px, Py\rangle = (Px)^T (Py) = x^T P^T P y \overset{P^T P = I}{=} x^T y = \langle x, y\rangle$$

3. (α) Αν ο πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}]$ είναι άνω τριγωνικός τότε θα είναι ορθομοναδιαίος αν:

$$AA^T = I_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 & a_{21}a_{12} + a_{31}a_{13} + \cdots + a_{2n}a_{1n} & \cdots & a_{1n}a_{nn} \\ a_{21}a_{12} + a_{31}a_{13} + \cdots + a_{2n}a_{1n} & a_{22}^2 + a_{23}^2 + \cdots + a_{2n}^2 & \cdots & a_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}a_{1n} & a_{nn}a_{2n} & \cdots & a_{nn}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pm 1 & i = j \end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας A θα πρέπει να είναι διαγώνιος.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι $TT^T = I$.

$$TT^T = \left(U^{-1}AU\right)\left(U^{-1}AU\right)^T = U^{-1}AUU^T A^T \left(U^{-1}\right)^T \overset{UU^T = I}{=}$$

$$= U^{-1}AA^T \left(U^{-1}\right)^T \overset{AA^T = I}{=} U^{-1}\left(U^{-1}\right)^T = U^{-1}\left(U^T\right)^{-1} = \left(U^T U\right)^{-1} \overset{U^T U = I}{=} I$$

(γ) Είναι γνωστό από το Θεώρημα 10.3.3.4 (Schur) ότι για κάθε πίνακα $A \in M_n[\mathbb{R}]$, όπου ο Α έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές, υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $Q \in M_n[\mathbb{R}]$ τέτοιος ώστε

$$Q^T AQ = T$$

όπου ο πίνακας $T \in M_n[\mathbb{R}]$ είναι άνω τριγωνικός. Αν λοιπόν ο πίνακας A είναι ορθογώνιος τότε από το ερώτημα (β) και ο πίνακας T θα πρέπει να είναι ορθογώνιος. Επειδή όμως ο πίνακας T είναι άνω τριγωνικός από το ερώτημα (α) θα πρέπει να είναι διαγώνιος, το οποίο και αποδεικνύει το ερώτημα (γ).■

4. Μια από τις ιδιοτιμές του πίνακα A είναι το $\lambda = 2$ στο οποίο αντιστοιχεί και το ιδιοδιάνυσμα $u = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα αυτό ώστε να έχει μήκος 1 και συνεπώς να πάρουμε στη θέση του το $u = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}^T$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt υπολογίζουμε 1 διάνυσμα v τέτοιο ώστε τα $\{u, v\}$ να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση. Αρχικά παρατηρούμε ότι τα διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt έχουμε:

$$u_1 = u = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

$$v_1 = v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2/\sqrt{13}}{1} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/13 \\ -6/13 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}, v_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τον πίνακα Q που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\{u_1, v_1\}$:

$$Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

και εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας D έχει ήδη γίνει άνω τριγωνικός. ■

Ασκήσεις Κεφαλαίου 10

1. Να ελέγξετε ποιες από τις παρακάτω γραμμικές απεικονίσεις διαγωνιοποιείται:

(a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (2x-3y, 2x-5y)$

(b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (2x-y, -2x+3y)$

(c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x-3y+3z, 3x-5y+3z, 6x-6y+4z)$

(d) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (4x-y, -x+4y)$

2. Να ελέγξετε ποιοι από τους παρακάτω πίνακες διαγωνιοποιούνται, και να φέρεται στην διαγώνια μορφή αυτούς οι οποίοι διαγωνοποιούνται.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2[\mathbb{R}] \ ; \ A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2[\mathbb{C}] \ ; \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -7 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3[\mathbb{R}]$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3[\mathbb{R}] \ ; \ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4[\mathbb{R}]$$

3. Απαντήστε με σωστό/λάθος στις παρακάτω προτάσεις :

(α) Κάθε πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}]$ που έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος.

(β) Κάθε πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}]$ που έχει λιγότερες από n διαφορετικές ιδιοτιμές δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

(γ) Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(δ) Αν δύο πίνακες A,B είναι όμοιοι και ο ένας από αυτούς, έστω ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε και ο άλλος B θα είναι διαγωνιοποιήσιμος.

(ε) Αν ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε και ο ανάστροφος του θα είναι διαγωνιοποιήσιμος.

(στ) Έστω ο πίνακας $A \in M_n[\mathbb{R}]$ τότε οι πίνακες AA^T και $A + A^T$ είναι διαγωνιοποιήσιμοι.

(ζ) Αν ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε και ο αντίστροφος του θα είναι διαγωνιοποιήσιμος.

(η) Το γινόμενο 2 συμμετρικών πινάκων είναι συμμετρικός πίνακας.

(θ) Το γινόμενο 2 ορθογώνιων πινάκων είναι ορθόγωνιος πίνακας.

(ι) Κάθε αντιστρέψιμος πίνακας διαγωνιοποιείται.

4. Να υπολογίσετε την παράσταση $A^n - 3A^{n-1}$ όπου

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Να υπολογιστεί η ν-οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Σε έναν δήμο υπάρχουν 3 μεγάλα super-market. Αν υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός του συγκεκριμένου δήμου είναι σταθερός, έχει παρατηρηθεί μια μετακίνηση πελατών από το ένα κατάστημα στο άλλο. Ποιο συγκεκριμένα τον Ιανουάριο, το ½ του πληθυσμού ψώνιζε από το κατάστημα Α, ¼ από το κατάστημα Β και ¼ από το κατάστημα Γ. Κάθε μήνα το κατάστημα Α κρατάει το 90% των πελατών του ενώ το 5% των πελατών του μετακινείται στο κατάστημα Β και το υπόλοιπο 5% στο κατάστημα Γ. Το κατάστημα Β κρατάει το 50% των πελατών του ενώ το 45% μετακινείται στο κατάστημα Α και το 5% στο κατάστημα Γ. Τέλος το κατάστημα Γ διατηρεί το 60% των πελατών του ενώ 20% των πελατών του μετακινείται στο κατάστημα Α και 20% στο κατάστημα Β. Εφόσον υπολογίσετε τον πίνακα μετάβασης για το συγκεκριμένο πρόβλημα, να υπολογίσετε τους πελάτες του καταστήματος τον μήνα Φεβρουάριο και Μάρτιο. Αν υποθέσουμε ότι ο ίδιος κανόνας θα συνεχίσει να ισχύει στο μέλλον να υπολογίσετε ποια θα είναι η οριακή τιμή των ποσοστών του πληθυσμού που θα αντιστοιχούν σε κάθε κατάστημα.

7. Προσπάθησε να λύσεις την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$F_{k+2} = 2F_{k+1} - F_k$$

όπου $F_1 = 1, F_2 = 2$.

Σημείωση. Θέσε $x_k = F_k, y_k = F_{k+1} = x_{k+1}$ και προσπάθησε να γράψεις τις εξισώσεις που προκύπτουν ως

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

όπου $A \in M_2[\mathbb{R}]$.

8. Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) = 4y_1(x) + 3y_2(x) \end{cases}$$

όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή x και ισχύει $y_1(0) = 1, y_2(0) = -1$

9. Προσπαθήστε να λύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$y''(x) - 4y(x) = 0$$

όπου $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Υπόδειξη. Ορίστε τις νέες μεταβλητές

$$y_1(x) = y(x)$$

$$y_2(x) = y'(x) = y_1'(x)$$

και σχηματίστε ένα σύστημα 2 διαφορικών εξισώσεων με 2 άγνωστες συναρτήσεις ($y_1(x), y_2(x)$).

10. Να επιλύσετε την εξίσωση

$$X^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ -48 & 25 \end{pmatrix}}_{A},\ X \in M_2[\mathbb{R}]$$

11. Για ποιες τιμές του a ο πίνακας A διαγωνιοποιείται :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Υπολογίστε μια ορθομοναδιαία βάση για τον χώρο των ιδιοδιανυσμάτων των πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Να παραγοντοποιηθούν οι πίνακες στην μορφή $A = QDQ^T \left(B = QDQ^T \right)$ (Schur παραγοντοποίηση).

13. Να υπολογίσετε έναν ορθογώνιο πίνακα $Q \in M_3[\mathbb{R}]$ τέτοιο ώστε $A = QDQ^T$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

όπου ο πίνακας $D \in M_3[\mathbb{R}]$ είναι διαγώνιος.

14. Να εφαρμόσετε την μεθοδολογία του παραδείγματος 10.3.3.5 προκειμένου να υπολογίσετε έναν ορθογώνιο πίνακας $Q \in M_2[\mathbb{R}]$ τέτοιο ώστε

$$Q^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} Q = T$$

όπου ο πίνακας $T \in M_2[\mathbb{R}]$ είναι άνω τριγωνικός.

Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 10

1. (α) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι ο
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$
ο οποίος έχει δύο διαφορετικές ιδιοτιμές {1,-4} και συνεπώς διαγωνιοποιείται.
(β) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι ο
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
ο οποίος έχει δύο διαφορετικές ιδιοτιμές {1,4} και συνεπώς διαγωνιοποιείται.
(γ) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι ο
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$
ο οποίος έχει την ιδιοτιμή -2 που έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 2 και την ιδιοτιμή 4 με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και συνεπώς διαγωνιοποιείται.
(δ) Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι ο
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$
ο οποίος έχει τις διακεκριμένες ιδιοτιμές {3,5} και συνεπώς διαγωνιοποιείται. ■

2. Ο πίνακας A_1 έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές {0,10} και συνεπώς διαγωνιοποιείται.
Ο πίνακας A_2 έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές {2+i,2-i} και συνεπώς διαγωνιοποιείται αν ο πίνακας ανήκει στο $M_2\left[\mathbb{C}\right]$ ενώ δεν διαγωνιοποιείται αν ο πίνακας ανήκει στο $M_2\left[\mathbb{R}\right]$.
Ο πίνακας A_3 έχει ως ιδιοτιμή την {-1} με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και συνεπώς δεν διαγωνιοποιείται.
Ο πίνακας A_4 έχει ως ιδιοτιμή την {3} με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και συνεπώς δεν διαγωνιοποιείται.
Ο πίνακας A_5 έχει ως ιδιοτιμή την {2} με αλγεβρική πολλαπλότητα 3 και γεωμετρική πολλαπλότητα 3 και την ιδιοτιμή {-2} με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και συνεπώς διαγωνιοποιείται. ■

3. (α) ΣΩΣΤΟ
(β) ΛΑΘΟΣ (μπορεί οι ιδιοτιμές να έχουν γεωμετρική πολλαπλότητα >1)
(γ) ΛΑΘΟΣ (μπορεί στην ίδια ιδιοτιμή να έχουμε γεωμετρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από ένα και συνεπώς τα ιδιοδιανύσματα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα).
(δ) ΣΩΣΤΟ ($B = P^{-1}AP \underset{D=diag[d_1,d_2,\ldots,d_n]}{\overset{\exists Q: A=Q^{-1}DQ}{\Rightarrow}} B = P^{-1}Q^{-1}DQP = \left(QP\right)^{-1} D\left(QP\right)$)

(ε) ΣΩΣΤΟ ($\exists Q : A = Q^{-1}DQ \overset{(\,)^T}{\Rightarrow} A^T = \left(Q^{-1}DQ\right)^T = \left(Q^T\right)^{-1} DQ^T$).

(στ) ΣΩΣΤΟ (παρατήρησε ότι οι πίνακες AA^T και $A + A^T$ είναι συμμετρικοί πρδ. $\left(AA^T\right)^T = \left(A^T\right)^T A^T = AA^T$ και $\left(A + A^T\right)^T = A^T + A$).

(ζ) ΣΩΣΤΟ ($\exists Q : A = Q^{-1}DQ \overset{(\,)^{-1}}{\Rightarrow} A^{-1} = \left(Q^{-1}DQ\right)^{-1} = Q^{-1}D^{-1}Q$).

(η) ΛΑΘΟΣ ($\left(AB\right)^T = B^T A^T = BA$). Θα ήταν σωστό μόνο στην κατηγορία των πινάκων που αντιμετατίθενται.

(θ) ΣΩΣΤΟ $\left(AB\right)^* \left(AB\right) = B^* A^* AB \overset{A^*A=I}{=} B^* B \overset{B^*B=I}{=} I$.

(ι) ΛΑΘΟΣ (Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αλλά δεν διαγωνιοποιείται.)

■

4. Ο πίνακας A διαγωνιοποιείται και συνεπώς ακολουθώντας την θεωρία του κεφαλαίου 10.2.1 υπολογίζω τον πίνακα A^n και συνεπώς και την παράσταση

$$A^n - 3A^{n-1} = \begin{pmatrix} 2\times 7^{n-1} & 7^{n-1} & 2\times 7^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\times 7^{n-1} & 7^{n-1} & 2\times 7^{n-1} \end{pmatrix}$$ ■

5. Παρόμοια με την άσκηση 4, θα έχουμε

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 + 2\left(-1\right)^n & -2 + 2\left(-1\right)^n \\ 1 - \left(-1\right)^n & 2 - \left(-1\right)^n \end{pmatrix}$$ ■

6. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Κατάστημα Α	Κατάστημα Β	Κατάστημα Γ
Κατάστημα Α	90%	5%	5%
Κατάστημα Β	45%	50%	5%
Κατάστημα Γ	20%	20%	60%

Έστω $x_k\left(i\right)$ η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να πηγαίνει στο κατάστημα *k* στην αρχή κάθε μήνα *i*, και p_{ij} η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού που βρίσκεται στο κατάστημα i να πάει στο κατάστημα j τον επόμενο μήνα. Εύκολα παρατηρούμε ότι :

$$x_1(i) = \frac{90}{100}x_1(i-1) + \frac{45}{100}x_2(i-1) + \frac{20}{100}x_3(i-1)$$
$$x_2(i) = \frac{5}{100}x_1(i-1) + \frac{50}{100}x_2(i-1) + \frac{20}{100}x_3(i-1)$$
$$x_3(i) = \frac{5}{100}x_1(i-1) + \frac{5}{100}x_2(i-1) + \frac{60}{100}x_3(i-1)$$

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix}}_{x_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{45}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{50}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{5}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i-1) \\ x_2(i-1) \\ x_3(i-1) \end{bmatrix}}_{x_{i-1}}$$

Ο πίνακας μετάβασης συνεπώς θα είναι ο :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{45}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{50}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{5}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2.2.1 είναι :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}}_{x_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{45}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{50}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{5}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}^n}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}}_{x_0}$$

Συνεπώς για τον μήνα Φεβρουάριο και Μάρτιο η λύση που αναζητούμε είναι η παρακάτω :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{bmatrix}}_{x_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{45}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{50}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{5}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}^1}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}}_{x_0} = \begin{bmatrix} 49/80 \\ 1/5 \\ 3/16 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.6125 \\ 0.2 \\ 0.1875 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{bmatrix}}_{x_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{45}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{50}{100} & \frac{20}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{5}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}^2}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}}_{x_0} = \begin{bmatrix} 543/800 \\ 269/1000 \\ 49/320 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.67875 \\ 0.168125 \\ 0.153125 \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα A^n εφαρμόζουμε την μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας και έχουμε :

Βήμα 1. Ιδιοτιμές του πίνακα A : $\left\{1, \frac{11}{20}, \frac{9}{20}\right\}$. Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι απλές (έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1), ο πίνακας διαγωνιοποιείται.

In[1]:= `a = {{90 / 100, 45 / 100, 20 / 100}, {5 / 100, 50 / 100, 20 / 100}, {5 / 100, 5 / 100, 60 / 100}}`

Out[1]= $\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

In[2]:= `Eigenvalues[a]`

Out[2]= $\left\{1, \frac{11}{20}, \frac{9}{20}\right\}$

Βήμα 2. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 76/11 \\ 12/11 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

In[3]:= `Eigenvectors[a]`

Out[3]= $\begin{pmatrix} \frac{76}{11} & \frac{12}{11} & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Βήμα 3. Σχηματίζω τον πίνακα $T \in M_3[\mathbb{R}]$ που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α.

$$T = \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In[4]:= `t = Transpose[%]`

Out[4]= $\begin{pmatrix} \frac{76}{11} & -\frac{5}{2} & -1 \\ \frac{12}{11} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Βήμα 4. Τότε

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11/20 & 0 \\ 0 & 0 & 9/20 \end{bmatrix} = T^{-1}AT \Rightarrow A^n = TS^nT^{-1} \Rightarrow$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(11/20\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(9/20\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το όριο της παραπάνω δύναμης όταν $n \to \infty$ θα είναι ο πίνακας ($\lim_{n\to\infty} \left(11/20\right)^n = 0, \lim_{n\to\infty} \left(9/20\right)^n = 0$) :

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 76/11 & -5/2 & -1 \\ 12/11 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 76/99 & 76/99 & 76/99 \\ 4/33 & 4/33 & 4/33 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

```
In[5]:= t.{{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}.Inverse[t]
```

Out[5]=
$$\begin{pmatrix} \frac{76}{99} & \frac{76}{99} & \frac{76}{99} \\ \frac{4}{33} & \frac{4}{33} & \frac{4}{33} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

```
In[6]:= MatrixPower[a, n] // Simplify
```

Out[6]=
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{99} 2^{-2n-1} 5^{-n} (19\, 2^{2n+3} 5^n - 9^{n+1} + 5\, 11^{n+1}) & \frac{1}{99} 2^{-2n-1} 5^{-n} (19\, 2^{2n+3} 5^n - 23\, 9^{n+1} + 5\, 11^{n+1}) & \frac{76}{99} + \frac{1}{11}\left(\frac{9}{5}\right)^n 4^{2-n} - \frac{1}{9} 11^n 20^{1-n} \\ \frac{4}{33} + \frac{1}{11}\left(\frac{9}{5}\right)^n 2^{-2n-1} - \frac{1}{3} 2^{-2n-1}\left(\frac{11}{5}\right)^n & \frac{4}{33} + \frac{23}{11}\left(\frac{9}{5}\right)^n 2^{-2n-1} - \frac{1}{3} 2^{-2n-1}\left(\frac{11}{5}\right)^n & \frac{4}{33} + \frac{1}{3}\left(\frac{11}{5}\right)^n 4^{1-n} - \frac{1}{11}\left(\frac{9}{5}\right)^n 4^{2-n} \\ \frac{1}{9}\left(1 - \left(\frac{11}{20}\right)^n\right) & \frac{1}{9}\left(1 - \left(\frac{11}{20}\right)^n\right) & \frac{1}{9}\left(1 + 2^{3-2n}\left(\frac{11}{5}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

Το όριο του παραπάνω πίνακα όταν $n \to \infty$ είναι :

```
In[7]:= Limit[%, n→ Infinity]
```

Out[45]=
$$\begin{pmatrix} \frac{76}{99} & \frac{76}{99} & \frac{76}{99} \\ \frac{4}{33} & \frac{4}{33} & \frac{4}{33} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Επειδή $x_k(i)$,k=1,2,3 αποτελούν την πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να παραμείνει στο κατάστημα 1, 2, και 3 αντίστοιχα, συνεπώς $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 1$, όποιες και αν είναι οι πιθανότητες αυτές. Συνεπώς η λύση της εξίσωσης διαφορών καθώς το $n \to \infty$ θα είναι :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A^n x_0 = \begin{bmatrix} 76/99 & 76/99 & 76/99 \\ 4/33 & 4/33 & 4/33 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 76/99 \\ 4/33 \\ 1/9 \end{bmatrix} \left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) \right) = \begin{bmatrix} 76/99 \\ 4/33 \\ 1/9 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.767677 \\ 0.121212 \\ 0.111111 \end{bmatrix}$$

■

4. Μετά τον μετασχηματισμό θα πάρουμε το σύστημα

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}}_{z_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}}_{z_k}, \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}_{z_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

που έχει λύση την

$$z_k = A^k z_0 = A^{k-1} A z_0 = A^{k-1} z_1$$

ή ισοδύναμα την

$$z_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k - 3^{k-1} \\ 2^{k+1} - 3^k \end{pmatrix} \Rightarrow F_k = 2^k - 3^{k-1}$$

```
In[1]:= RSolve[{f[k+2] == 5 f[k+1] - 6 f[k], f[1] == 1, f[2] == 1}, f[k], k]
```

Out[1]= $\left\{\left\{f(k) \to \frac{1}{3}\left(3\,2^k - 3^k\right)\right\}\right\}$

■

7. Εφόσον μετασχηματίσω τις εξισώσεις σε μορφή πινάκων :

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

η λύση θα είναι

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{k-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k+1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς $F_k = k$. ■

8. Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$$

■

9. Η διαφορική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{2x} \\ -e^{-2x} + e^{2x} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

■

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{2x}$$

10. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι παρακάτω :

$$X=\begin{pmatrix}-9 & 4\\ -24 & 11\end{pmatrix}\ ;\ X=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -12 & 7\end{pmatrix}\ ;\ X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 12 & -7\end{pmatrix}\ ;\ X=\begin{pmatrix}9 & -4\\ 24 & -11\end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

11. Ο A διαγωνιοποιείται μόνο αν $\alpha=0$. ■

12.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2 & -2\\ -2 & 2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & -2 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/6\\ 1/2 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2\\ 1/2 & 0 & \sqrt{2/3} & -\sqrt{3}/6\\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/6\\ 1/2 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2\\ 1/2 & 0 & \sqrt{2/3} & -\sqrt{3}/6\\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/6\end{pmatrix}^T$$

και

$$B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6\\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{2/3}\\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6\\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{2/3}\\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6\end{pmatrix}^T$$

Παρακάτω δίνουμε τον τρόπο υπολογισμού του πίνακα *Q* στο Mathematica.

Βήμα 1^o. Ορίζουμε τον πίνακα *A*.

```
In[1]:= a = {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}}
```

$$\text{Out[1]=}\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

Βήμα 2^o. Καλούμε το πακέτο “Orthogonalization” που ανήκει στο πακέτο “LinearAlgebra” και το οποίο διαθέτει συναρτήσεις για την ορθοκανονικοποίηση των διανυσμάτων μιας βάσης.

```
In[2]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

Βήμα 3^o. Υπολογίζουμε τον πίνακα *Q* ορθοκανονικοποιόντας την βάση που προκύπτει από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* (η ορθοκανονικοποίηση γίνεται με την μέθοδο GramSchmidt).

In[3]:= **q = Transpose[GramSchmidt[Eigenvectors[a]]]**

Out[3]= $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Βήμα 4^{o}. Υπολογίζουμε τον διαγώνιο πίνακα D.

In[4]:= **Transpose[q].a.q // Simplify**

Out[4]= $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

■

13. Όμοια με την άσκηση 12 έχουμε

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}^{T}$$

■

14. Μια από τις ιδιοτιμές του πίνακα A είναι το $\lambda = 5$ στο οποίο αντιστοιχεί και το ιδιοδιάνυσμα $u = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^{T}$. Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα αυτό ώστε να έχει μήκος 1 και συνεπώς να πάρουμε στη θέση του το $u = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}^{T}$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt υπολογίζουμε 1 διάνυσμα v τέτοιο ώστε τα $\{u, v\}$ να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση. Αρχικά παρατηρούμε ότι τα διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt έχουμε:

$$u_1 = u = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

$$v_1 = v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2/\sqrt{13}}{1} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/13 \\ -6/13 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}, v_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τον πίνακα Q που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\{u_1, v_1\}$:

$$Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

και εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας D έχει ήδη γίνει άνω τριγωνικός.