

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Η/Υ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΣΤΑΥΡΟΥ Δ. ΒΟΛΟΓΙΑΝΝΙΔΗ

Πτυχιούχου Μαθηματικού

ΑΛΓΕΒΡΟ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ
ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ.

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

2005

ΣΤΑΥΡΟΥ Δ. ΒΟΛΟΓΙΑΝΝΙΔΗ

ΑΛΓΕΒΡΟ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ
ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών,
Τομέας Επιστήμης Η/Υ και Αριθμητικής Ανάλυσης
Ημερομηνία Προφορικής Εξέτασης: 24 Ιανουαρίου, 2005

Εξεταστική Επιτροπή

Καθηγητής Α.Ι. Βαρδουλάκης, Επιβλέπων

Καθηγητής Τ. Κουσιουρής, Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής

Καθηγητής Σ. Μποζαπαλίδης, Εξεταστής

Αναπληρωτής Καθηγητής Γ. Τσακλίδης, Εξεταστής

Αναπληρωτής Καθηγητής Α. Πάπιστας, Εξεταστής

Επίκουρος Καθηγητής Ν. Καραμπετάκης, Εξεταστής

Επίκουρη Καθηγήτρια Μ. Γουσίδου - Κουτίτα, Εξετάστρια

©Βολογιαννίδης Δ. Σταύρος

©Α.Π.Θ.

ΑΛΓΕΒΡΟ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΕΛΕΓΧΟΥ

ISBN

"Η έγκριση της παρούσης Διδακτορικής Διατριβής από το Τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέως" (Ν. 5343/1932, άρθρο 202, παρ. 2)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	Μαθηματικό υπόβαθρο	1
1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Πίνακες	1
1.3	Πολυωνυμικοί πίνακες	4
1.3.1	Εισαγωγή	4
1.3.2	Αλγεβρική δομή πολυωνυμικών πινάκων	6
1.3.3	Ισοδυναμίες	10
1.4	Ρητοί πίνακες	11
1.4.1	Εισαγωγή	11
1.4.2	Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων	12
1.5	Ελάχιστη βάση πολυωνυμικών πινάκων και απαλείφουσες	15
1.6	Πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες	17
1.7	Αντίστροφοι πολυωνυμικών πινάκων	20
2	Αντίστροφοι πολυωνυμικών πινάκων μιας μεταβλητής	24
2.1	Εισαγωγή	24
2.1.1	Ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος	24
2.1.2	Ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος	25
2.1.3	Παρεμβολή πολυωνύμων	27
2.1.4	Διακριτός μετασχηματισμός Fourier	30
2.1.5	Παρεμβολή πολυωνύμων και FFT	33
2.2	Αλγόριθμος υπολογισμού του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.	35
2.3	Αλγόριθμος υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντίστροφου.	40

<i>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</i>	6
2.4 Συμπεράσματα	49
3 Αντίστροφοι πολυωνυμικών πινάκων πολλών μεταβλητών	53
3.1 Εισαγωγή	53
3.1.1 Ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος	54
3.1.2 Ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος	55
3.1.3 Παρεμβολή πολυωνύμων	56
3.1.4 Διακριτός πολυδιάστατος μετασχηματισμός Fourier	57
3.1.5 Παρεμβολή πολυωνύμων και FFT	58
3.2 Αλγόριθμος υπολογισμού του Moore-Penrose γενικευμένου αντί- στροφου.	58
3.3 Αλγόριθμος υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντίστροφου.	67
3.4 Συμπεράσματα	74
4 Ελάχιστη πολυωνυμική βάση	76
4.1 Εισαγωγή	76
4.2 Υπολογισμός ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης	77
4.3 Αριθμητικές ιδιότητες του αλγορίθμου	85
4.4 Παραδείγματα	87
4.5 Συμπεράσματα	92
5 Στοιχειώδης ισοδυναμία	93
5.1 Εισαγωγή	93
5.2 Μια νέα ισοδυναμία κανονικών πολυωνυμικών πινάκων	95
5.3 Στοιχειώδης ισοδυναμία και αυτοπαλλίνδρομα συστήματα	115
5.4 Συμπεράσματα	120
6 Μια νέα οικογένεια συνοδευόντων πινάκων	121
6.1 Εισαγωγή	121
6.2 Μια νέα οικογένεια συνοδευόντων πινάκων	123
6.3 Γραμμικοποιήσεις Ερμητιανών πολυωνυμικών πινάκων	128
6.4 Συμπεράσματα	137
7 Συμπεράσματα	139

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

2.1	Γράφημα του χρόνου (CPU time) υπολογισμού του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα, σε συνάρτηση με τον αριθμό των γραμμών και το βαθμό του πίνακα.	42
2.2	Γράφημα του χρόνου (CPU time) υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντίστροφου, σε συνάρτηση με τον αριθμό των γραμμών και το βαθμό του πίνακα.	51
3.1	Σύγκριση μεταξύ του χρόνου (CPU time) που χρειάζεται για τον υπολογισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 52 (γκρι) και αυτόν του Θεωρήματος 47 (μαύρο)	65
3.2	Ανάλυση διαταραχών του παρονομαστή του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.	66
3.3	Ανάλυση διαταραχών του αριθμητή του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.	67
6.1	Σύστημα ελατηρίων - μαζών - εξασθενητήρων κίνησης	134

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

2.1	Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.	40
2.2	Χρόνοι εκτέλεσης των δύο αλγορίθμων υπολογισμού του Moore-Penrose γενικευμένου αντιστρόφου.	41
2.3	Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Drazin γενικευμένου αντίστροφου.	49
2.4	Χρόνοι εκτέλεσης των δύο αλγορίθμων υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντιστρόφου.	50
3.1	Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα πολλών μεταβλητών.	64
3.2	Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Drazin γενικευμένου αντίστροφου ενός πολυωνυμικού πίνακα πολλών μεταβλητών.	74

Δημοσιεύσεις

Σε διεθνή περιοδικά

1. N. P. Karampetakis and S. Vologiannidis, DFT calculation of the generalized and Drazin inverse of a polynomial matrix, *Applied Mathematics and Computation*, 2003, vol 143, pp 501-521.
2. S. Vologiannidis and N. P. Karampetakis, Inverses of Multivariable Polynomial Matrices by Discrete Fourier Transforms, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 15 (4): 341-361, October 2004.
3. N. P. Karampetakis and S. Vologiannidis, Infinite elementary divisor structure-preserving transformations for polynomial matrices, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2003, Vol. 13, No 4, pp 493-503.
4. N. P. Karampetakis, S. Vologiannidis and A.I. Vardulakis, Notions of equivalence for discrete time AR-representations, *International Journal of Control*, 15 April 2004, Vol. 77, No. 6, pp 584-597.
5. E.N. Antoniou, S. Vologiannidis, A new family of companion forms of polynomial matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 2004, Vol. 11, pp 78-87.

Σε διεθνή περιοδικά (υπό κρίση)

1. E.N. Antoniou, A.I.G. Vardulakis and S. Vologiannidis, Numerical Computation of Minimal Polynomial Bases: A Generalized Resultant Approach, *submitted for possible publication*.

Δημοσιεύσεις σε διεθνή συνέδρια με κριτές

1. N. P. Karampetakis, S. Vologiannidis and A.I. Vardulakis, Notions of equivalence for discrete time AR-representations, *15th IFAC World Congress 2002*, Barcelona, Spain.
2. N. P. Karampetakis and S. Vologiannidis, Infinite elementary divisor structure-preserving transformations for polynomial matrices, *8th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, 2-5 September, 2002, Szczecin, Poland
3. N. P. Karampetakis and S. Vologiannidis, DFT calculation of the generalized and Drazin inverse of a polynomial matrix, *IEEE Conference on Computer Aided Control System Design CACSD'02*, 18-20 September 2002, Glasgow, Scotland,
4. A.I. Vardulakis, N. P. Karampetakis, E. Antoniou, P. Tzekis and S. Vologiannidis, A descriptor systems package for Mathematica, *11th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'03)*, 2003, Rhodes, Greece.
5. S. Vologiannidis and N. P. Karampetakis, Inverses of Multivariable Polynomial Matrices by Discrete Fourier Transforms, *European Control Conference 2003*, Cambridge, 1-4 September 2003, U.K.
6. N. P. Karampetakis and S. Vologiannidis, On the Laurent series expansion of the resolvent of a polynomial matrix and applications, *12th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'04)*, Kusadasi, 6-9 June 2004, Turkey.

7. E.N. Antoniou and S. Vologiannidis, On the Computation of Minimal Polynomial Bases, *12th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'04)*, Kusadasi, 6-9 June 2004, Turkey.
8. Petr Kujan, Martin Hromcik, Michael Sebek, N.P. Karampetakis, E.N. Antoniou, S. Vologiannidis, Effective computations with 2-variable polynomial matrices in Mathematica, *12th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'04)*, Kusadasi, 6-9 June 2004, Turkey.

Δημοσιεύσεις σε διεθνή συνέδρια με κριτές (υπό κρίση)

1. E.N. Antoniou and S. Vologiannidis, Linearizations of polynomial matrices with symmetries and applications, *submitted for possible publication to the 13th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'05)*, 2005, Limassol, Cyprus.

Περίληψη

Η θεωρία πολυωνυμικών πινάκων παίζει πρωταρχικό ρόλο σε πολλά προβλήματα αυτομάτου ελέγχου. Αυτή η διατριβή ασχολείται με βασικά θεωρητικά προβλήματα της πολυωνυμικής θεώρησης του αυτομάτου ελέγχου, αλλά και με την ανάπτυξη υπολογιστικών μεθόδων για πράξεις πολυωνυμικών πινάκων μιας ή και περισσοτέρων μεταβλητών. Προτάθηκε μια νέα ισοδυναμία κανονικών πολυωνυμικών πινάκων, η οποία διατηρεί αναλλοίωτους τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες και που αποτελεί άμεση γενίκευση της γνωστής αυστηρής ισοδυναμίας πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων. Επίσης προτάθηκε μια νέα οικογένεια συνοδευουσών μορφών πολυωνυμικών πινάκων με συγκεκριμένη και ιδιαίτερα απλή μορφή, τα μέλη της οποίας γράφονται σαν γινόμενο στοιχειωδών "αραιών" πινάκων. Σε αυτή την οικογένεια εκτός από την γνωστή πρώτη και δεύτερη συνοδευούσα μορφή, περιλαμβάνονται και άλλες συνοδευούσες με πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Αναπτύχθηκαν και υλοποιήθηκαν δύο νέοι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του Moore-Penrose και Drazin γενικευμένων αντιστρόφων πολυωνυμικών πινάκων μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών, που συνδυάζουν τεχνικές υπολογισμού / παρεμβολής και τον γρήγορο μετασχηματισμό Fourier (*FFT*). Περιγράφηκε ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό της ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης του πυρήνα ενός πολυωνυμικού πίνακα χρησιμοποιώντας διαδοχικές Sylvester ή Wolovich απαλείφουσες. Οι παραπάνω αλγόριθμοι αναλύθηκαν ως προς την ταχύτητα και ευρωστία τους, και αποδείχθηκαν αποδοτικότεροι από τους μέχρι στιγμής γνωστούς στη βιβλιογραφία.

Abstract

Polynomial matrix theory is very important to many automatic control related problems. This thesis focuses on basic theoretical problems of the polynomial point of view of automatic control, but also on the development of algorithms dealing with polynomial matrices of one or more variables. A new equivalence between polynomial matrices was introduced, that generalizes the well known strict equivalence between matrix pencils, having as invariants the finite and infinite elementary divisor structure of the polynomial matrices involved. A new family of companion forms has also been presented, having a particularly simple structure, whose members can be written as a product of certain elementary sparse matrices. In this family not only the well known first and second companion forms are included, but also other companion forms with very interesting properties. New algorithms for the calculation of the Moore-Penrose and Drazin inverses of polynomial matrices of one or more variables have been introduced, combining evaluation/interpolation techniques and the Fast Fourier Transform (*FFT*). Also a new algorithm concerning the calculation of a minimal polynomial basis of the kernel of a polynomial matrix has been proved, that uses successive Sylvester or Wolovich resultants. The algorithms have been analyzed regarding their speed and numerical robustness and proved to be more efficient than the others known to the literature.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μαθηματικό υπόβαθρο

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν μερικές βασικές έννοιες για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων. Οι έννοιες αυτές θα παρουσιαστούν περιληπτικά με σκοπό την ευκολία αναφοράς του αναγνώστη έτσι ώστε να μην είναι αναγκαία η αναδρομή σε βιβλιογραφία και προέρχονται κυρίως από τις [Μπο84], [BT01], [Var91], [GLR82] και [Gan59].

1.2 Πίνακες

Έστω V και W δύο πραγματικοί διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης, με διαστάσεις n και m αντίστοιχα. Μια απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ ονομάζεται γραμμική αν και μόνο αν ισχύουν οι δύο παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}f(x + y) &= f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V \\f(\lambda x) &= \lambda f(x), \quad \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Η απεικόνιση αυτή μπορεί να παρασταθεί από ένα πραγματικό πίνακα A διαστάσεων $m \times n$, δεδομένων συγκεκριμένων βάσεων των χώρων V και W δηλαδή

$$f : V \rightarrow W \text{ με } f(x) = Ax.$$

Τάξη ή **βαθμίδα** (rank) ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ονομάζεται ο μεγαλύτερος αριθμός από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες ή γραμμές του πίνακα. Τότε

$$\begin{aligned}\dim f(V) &= \text{rank}(A) \\ \dim \ker f &= n - \text{rank} A.\end{aligned}$$

Η απεικόνιση f λέγεται **μονομορφισμός** αν-ν $\ker f = \{0\}$ ή ισοδύναμα αν-ν $\text{rank} A = n$. Αντίστοιχα η f λέγεται **επιμορφισμός** αν-ν $\dim f(V) = m$ ή ισοδύναμα αν $\text{rank} A = m$. Αν ισχύει $n = m = \text{rank} A$, τότε η f ονομάζεται **ισομορφισμός** και ο πίνακας A ονομάζεται αντιστρέψιμος.

Δύο τετράγωνοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζονται **όμοιοι** αν-ν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Η σχέση ομοιότητας πινάκων αποδεικνύεται ότι είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η ομοιότητα πινάκων αποτελείται από διαφορετικές παραστάσεις της ίδιας γραμμικής απεικόνισης για διαφορετικές βάσεις του V .

Έστω ένας τετράγωνος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ένα διάνυσμα x ονομάζεται **ιδιοάνυσμα** του A αν-ν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε

$$Ax = \lambda x.$$

Ο μιγαδικός αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του πίνακα A . Το πολυώνυμο

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A . Οι ρίζες του $a(\lambda)$ αποδεικνύεται ότι είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A . Έστω λ_i οι διακεκριμένες ρίζες του $a(\lambda)$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες μ_i όπου $i = 1, \dots, k$. Τότε το $a(\lambda)$ γράφεται

$$a(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}$$

και προφανώς ισχύει $\sum_{i=1}^k \mu_i = n$. Οι δείκτες μ_i ονομάζονται αλγεβρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών λ_i για $i = 1, \dots, k$. Το σύνολο

$$V_{\lambda_i} = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda_i x\},$$

ονομάζεται ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και η διάσταση του χώρου γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές ενός πίνακα, είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας, κάτι που τα ανάγει από ιδιότητες πινάκων σε ιδιότητες της αντίστοιχης γραμμικής απεικόνισης.

Ένα βασικό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας είναι το **θεώρημα Cayley-Hamilton**, το οποίο αποδεικνύει ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A ικανοποιείται από τον ίδιο τον πίνακα, δηλαδή

$$a(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0I = 0$$

όπου I ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας.

Κάθε τετράγωνος πίνακας A αποδεικνύεται ότι είναι όμοιος με ένα πίνακα της μορφής

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_v \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

όπου τα J_i , $i = 1, \dots, v$ αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i του A και έχουν την παρακάτω μορφή

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{i2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{im_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_i}, i = 1, 2, \dots, v$$

όπου μ_i η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής και m_i η γεωμετρική της πολλαπλότητα. Οι πίνακες J_{ij} ονομάζονται Jordan blocks και είναι της μορφής

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_{ij} \times p_{ij}}$$

όπου $\mu_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}$. Ο πίνακας (1.1), ονομάζεται κανονική μορφή του Jordan, είναι μοναδική μέχρι αναδιάταξης των Jordan blocks για κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η ομοιότητα πινάκων και χαρακτηρίζει πλήρως τη δομή των πινάκων της. Η κανονική μορφή του Jordan αποκαλύπτει πλήρως την φασματική δομή του πίνακα A .

1.3 Πολυωνυμικοί πίνακες

1.3.1 Εισαγωγή

Έστω \mathbb{R} το σώμα των πραγματικών αριθμών και $\mathbb{R}[s]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με συντελεστές στο \mathbb{R} . Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}[s]$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}[s]^{m \times n}$. Ας θεωρήσουμε τώρα τον πολυωνυμικό πίνακα

$$A(s) = A_q s^q + \cdots + A_1 s + A_0 \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}, \quad (1.2)$$

όπου $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, q$ και m όχι κατ' ανάγκη ίσο με n .

Ορισμός 1 Ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ ονομάζεται **κανονικός** (*regular*) αν-ν

$$m = n$$

και

$$\det A(s) \neq 0$$

για κάθε s εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημείων $s_i \in \mathbb{C}$. Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **μη κανονικός ή ιδιάζων** (*singular*).

Ορισμός 2 Ο **βαθμός** ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ ονομάζεται ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων που εμφανίζεται ανάμεσα στα στοιχεία του πίνακα.

Ορισμός 3 Ένας κανονικός πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$ ονομάζεται **αντιστρέψιμος ή μονομετρικός** (*unimodular*) στον δακτύλιο των πο-

λυωνυμικών πινάκων, αν-ν ο αντίστροφός του είναι επίσης πολυωνυμικός πίνακας ή ισοδύναμα αν-ν

$$\det A(s) = c \in \mathbb{R}, c \neq 0$$

ή ισοδύναμα αν

$$\text{rank}A(s) = n$$

για κάθε $s \in \mathbb{C}$.

Ορισμός 4 Ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ λέγεται **αριστερά (δεξιά) αντιστρέψιμος** ή **μονομετρικός αν-ν**

$$\text{rank}A(s_0) = m \text{ (αντίστοιχα } \text{rank}A(s_0) = n)$$

για κάθε $s_0 \in \mathbb{C}$.

Ας συμβολίσουμε τώρα με $\tilde{t}_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{1 \times n}$, $i = 1, \dots, m$ τα διανύσματα γραμμών του $A(s)$ και με $t_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$, $j = 1, \dots, n$ τα διανύσματα στηλών του. Δηλαδή ο $A(s)$ γράφεται

$$A(s) = \begin{bmatrix} \tilde{t}_1(s) \\ \tilde{t}_2(s) \\ \vdots \\ \tilde{t}_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1(s) & t_2(s) & \cdots & t_n(s) \end{bmatrix}.$$

Τότε έχω ότι $r_i = \deg \tilde{t}_i(s)$, $i = 1, \dots, m$, $q_j = \deg t_j(s)$, $j = 1, \dots, n$,

$$\tilde{t}_i^\top(s) = \sum_{k=0}^{r_i} \tilde{t}_{ik}^\top s^k, \quad i = 1, \dots, m$$

όπου $\tilde{t}_{ik}^\top \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ και

$$t_j(s) = \sum_{k=0}^{q_j} t_{jk} s^k, \quad j = 1, \dots, n$$

με $t_{jk} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω, ο $A(s)$ γράφεται

$$A(s) = \begin{bmatrix} s^{r_1} & & & 0 \\ & s^{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s^{r_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_{ir_1}^\top \\ \tilde{t}_{ir_2}^\top \\ \vdots \\ \tilde{t}_{ir_m}^\top \end{bmatrix} + T_r(s)$$

ή

$$A(s) = \begin{bmatrix} t_{1q_1} & t_{2q_2} & \cdots & t_{nq_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{q_1} & & & 0 \\ & s^{q_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s^{q_n} \end{bmatrix} + T_c(s)$$

όπου $T_r(s), T_c(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$, οι βαθμοί γραμμών του $T_r(s)$ είναι μικρότεροι από τα r_i και οι βαθμοί στηλών του $T_c(s)$ είναι μικρότεροι από τα q_i .

Ο πίνακας συντελεστής με το μέγιστο βαθμό κατά γραμμές του $A(s)$ θα συμβολίζεται με A^{hr} και είναι ίσος με

$$A^{hr} = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{1r_1}^\top \\ \tilde{t}_{2r_2}^\top \\ \vdots \\ \tilde{t}_{mr_m}^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (1.3)$$

Αντίστοιχα ο πίνακας συντελεστής με το μέγιστο βαθμό κατά στήλες του $A(s)$ θα συμβολίζεται με A^{hc} και είναι ίσος με

$$A^{hc} = \begin{bmatrix} t_{1q_1} & t_{2q_2} & \cdots & t_{nq_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (1.4)$$

Οι βαθμοί $q_i, i = 1, \dots, n$ της κάθε στήλης του $A(s)$ θα συμβολίζονται με $\deg_{c_i} A(s), i = 1, \dots, n$. Αντίστοιχα οι βαθμοί $r_i, i = 1, \dots, m$ της κάθε γραμμής του $A(s)$ θα συμβολίζονται με $\deg_{r_i} A(s), i = 1, \dots, m$.

Ορισμός 5 [Var91] Ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ με $m \geq n$ λέγεται **κανονικός κατά στήλες** (*column proper* ή *column reduced*) αν-ν ο πίνακας A^{hc} έχει πλήρη τάξη στηλών ($\text{rank} A^{hc} = n$). Αντίστοιχα ο $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ με $m \leq n$ λέγεται **κανονικός κατά γραμμές** (*row proper* ή *row reduced*) αν-ν ο πίνακας A^{hr} έχει πλήρη τάξη γραμμών ή ισοδύναμα αν-ν ο $A(s)^\top$ είναι κανονικός κατά στήλες.

1.3.2 Αλγεβρική δομή πολυωνυμικών πινάκων

Μια βασική ισοδυναμία πολυωνυμικών πινάκων είναι η μονομετρική ισοδυναμία, όπως ορίζεται πιο κάτω.

Ορισμός 6 [Gan59] Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A(s)$ και $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ ονομάζονται **μονομετρικά ισοδύναμοι στο \mathbb{C}** (*unimodular equivalent*) αν-ν υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ και $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε

$$B(s) = U(s)A(s)V(s).$$

Στην περίπτωση που $B(s) = U(s)A(s)$ (αντίστοιχα $B(s) = A(s)V(s)$) οι πίνακες ονομάζονται **αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) μονομετρικά ισοδύναμοι**.

Η προηγούμενη σχέση αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας πολυωνυμικών πινάκων, με κανονική μορφή την λεγόμενη Smith μορφή του πίνακα που ορίζεται αμέσως πιο κάτω.

Ορισμός 7 [Var91] Κάθε πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ είναι **μονομετρικά ισοδύναμος** με ένα πολυωνυμικό πίνακα της μορφής

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_r(s) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0_{m-r, n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$$

όπου $\varepsilon_i(s) \in \mathbb{R}[s]$, $i = 1, \dots, r$. Ο πίνακας $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)$ ονομάζεται **Smith μορφή** του πίνακα $A(s)$ στο \mathbb{C} και τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$ αναλλοίωτα πολυώνυμα του $A(s)$. Τα $\varepsilon_i(s)$ έχουν μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα και την εξής ιδιότητα

$$\varepsilon_i(s) | \varepsilon_{i+1}(s), i = 1, \dots, r-1.$$

Επίσης ισχύει

$$\varepsilon_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)}, i = 1, \dots, r$$

όπου $\Delta_0(s) := 1$, $\Delta_i(s) := \gcd^1 \{\text{ελάχιστονες ορίζουσες τάξης } i \text{ του } A(s)\}$.

Η Smith μορφή είναι μοναδική για κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζεται από την μονομετρική ισοδυναμία.

¹Με *gcd* συμβολίζουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη πολυωνύμων

Ορισμός 8 *Μηδενικά* του πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ ονομάζονται οι ρίζες των αναλλοίωτων πολωνύμων $\varepsilon_i(s)$. Αν $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, v$ είναι τα διαφορετικά μεταξύ τους μηδενικά του $A(s)$, τότε τα πολώνυμα $\varepsilon_i(s)$ μπορούν να γραφτούν

$$\varepsilon_i(s) = \prod_{j=1}^v (s - \lambda_j)^{m_{ij}}$$

και οι όροι $(s - \lambda_j)^{m_{ij}}$ ονομάζονται **πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες** (*finite elementary divisors*) του πίνακα $A(s)$. Επίσης οι εκθέτες m_{ij} έχουν την ιδιότητα

$$0 \leq m_{1j} \leq m_{2j} \leq \dots \leq m_{rj}, \quad j = 1, \dots, v.$$

Ορισμός 9 [GLR82] **Πεπερασμένο φασματικό ζεύγος** (*finite spectral pair*) ενός τετράγωνου πολωνυμικού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ ονομάζεται ένα ζεύγος πινάκων $X_j \in \mathbb{R}^{r \times m_j}$, $J_j \in \mathbb{R}^{m_j \times m_j}$, όπου ο J_j είναι στην *Jordan κανονική μορφή* που αντιστοιχεί σε ένα μηδενικό λ_j πολλαπλότητας $m_j = \sum_{i=0}^r m_{ij}$ αν-ν ισχύει

$$\sum_{k=0}^q A_k X_j J_j^k = 0 \text{ και } \text{rank} \begin{bmatrix} X_j \\ X_j J_j \\ \vdots \\ X_j J_j^{m_j-1} \end{bmatrix} = m_j.$$

Ο πίνακας J_j αποτελείται από *Jordan blocks* μεγέθους ίσου με τις μερικές πολλαπλότητες m_{ij} του λ_j .

Ορισμός 10 Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_v$ όλες οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ και (X_j, J_j) , $j = 1, \dots, v$ τα αντίστοιχα πεπερασμένα φασματικά τους ζεύγη. Ο συνολικός αριθμός των πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών του $A(s)$ είναι $n := \deg(\det A(s)) = \sum_{j=0}^v m_j$. Το ζεύγος πινάκων

$$\begin{aligned} X_F &= [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_v] \in \mathbb{R}^{r \times n} \\ J_F &= \text{diag} \{J_1, \dots, J_v\} \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

ονομάζεται **πεπερασμένο ιδιοζεύγος** του $A(s)$ και ικανοποιεί τις παρακάτω

σχέσεις

$$\sum_{k=0}^q A_k X_F J_F^k = 0, \text{ rank} \begin{bmatrix} X_F \\ X_F J_F \\ \vdots \\ X_F J_F^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

Συνεχίζουμε εισάγοντας κάποιες βασικές έννοιες για την δομή των πολυωνυμικών πινάκων στο ∞ .

Ορισμός 11 Δυικός πίνακας (*dual matrix*) ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ όπως στην (1.2) είναι ο πίνακας

$$\tilde{A}(s) = s^q A(s^{-1}) = A_0 s^q + \dots + A_q \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}.$$

Ορισμός 12 [Var91] Στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο (*infinite elementary divisors*) του πολυωνυμικού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ ονομάζονται οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του δυικού του πίνακα $\tilde{A}(s)$ στο $s = 0$. Έστω

$$S_{\tilde{A}(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}\{s^{\mu_1}, \dots, s^{\mu_r}\} & 0_{r, n-r} \\ 0_{m-r, r} & 0_{m-r, n-r} \end{bmatrix}$$

η τοπική Smith μορφή στο $s = 0$ του $\tilde{A}(s)$ με $\mu_j \in \mathbb{Z}^+$ και $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_r$. Ο συνολικός αριθμός στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο είναι $\mu = \sum_{i=1}^r \mu_i$.

Παρατήρηση 13 Ο πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ βαθμού q δεν έχει στοιχειώδεις διαιρέτες στο $s = \infty$ αν-ν $\text{rank} A_q = \min\{m, n\}$.

Ορισμός 14 [GLR82] Έστω ένας κανονικός τετράγωνος πολυωνυμικός πίνακας $A(s) = A_q s^q + \dots + A_0 \in \mathbb{R}^{r \times r}[s]$. Σαν **άπειρο ιδιοζεύγος** του $A(s)$ ορίζεται κάθε πεπερασμένο φασματικό ζεύγος (X_∞, J_∞) του $\tilde{A}(s)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ και ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

$$\sum_{k=0}^q A_k X_\infty J_\infty^{q-k} = 0, \text{ rank} \begin{bmatrix} X_\infty \\ X_\infty J_\infty \\ \vdots \\ X_\infty J_\infty^{\mu-1} \end{bmatrix} = \mu$$

όπου $X_\infty \in \mathbb{R}^{r \times \mu}$, $J_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$ και $\mu = \sum_{i=1}^r \mu_i$.

Θεώρημα 15 *Ο συνολικός αριθμός πεπερασμένων και άπειρων διαιρετών ενός τετράγωνου πολυωνυμικού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$, είναι ίσος με rq όπου q ο μέγιστος βαθμός όλων των στοιχείων του πίνακα. Δηλαδή ισχύει $\mu + \deg A(s) = rq$.*

1.3.3 Ισοδυναμίες

Μέχρι στιγμής έχει αναφερθεί η μονομετρική ισοδυναμία πολυωνυμικών πινάκων στο \mathbb{C} . Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε και κάποιες άλλες ισοδυναμίες που θα μας χρειαστούν στην συνέχεια.

Με το σύμβολο $P(m, l)$ θα εννοούμε το σύνολο των $(r+m) \times (r+l)$ πολυωνυμικών πινάκων όπου l και m είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι ή ίσοι με το μηδέν και το r μπορεί να πάρει τιμές από όλους τους ακέραιους που είναι μεγαλύτεροι από το $\max(-m, -l)$.

Ορισμός 16 [PS78] *Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in P(m, l)$ θα λέγονται γενικευμένα αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι ή *extended unimodular equivalent* (e.u.e.) αν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $M(s), N(s)$ τέτοιοι ώστε*

$$\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.5)$$

και οι block πίνακες

$$\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

να έχουν πλήρη τάξη $\forall s \in \mathbb{C}$.

Η γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία συνδέει πίνακες διαφορετικών διαστάσεων και διατηρεί αναλλοίωτους τους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες των πολυωνυμικών πινάκων. Γενικεύοντας την έννοια της αυστηρής ισοδυναμίας η οποία πρωτοεμφανίστηκε σε πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες [Gan59] σε γενικούς πολυωνυμικούς πίνακες, έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 17 [KVV04] Δύο πολυωνυμικοί πίνακες ίδιου βαθμού $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times l}$ θα λέγονται **αυστηρά ισοδύναμοι** (*strict equivalent*) αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι σταθεροί πίνακες $M \in \mathbb{R}^{m \times m}, N \in \mathbb{R}^{l \times l}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\begin{bmatrix} M & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N \end{bmatrix} = 0.$$

Ο παραπάνω ορισμός της αυστηρής ισοδυναμίας διατηρεί ταυτόχρονα τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες, συνδέοντας όμως μόνο πίνακες ίδιας διάστασης και βαθμού.

Ορισμός 18 [KPV94] Οι πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in P(m, l)$ θα λέγονται **$\{s_0\}$ -ισοδύναμοι** αν υπάρχουν ρητοί πίνακες $M(s)$ και $N(s)$ καταλλήλων διαστάσεων και χωρίς πόλους στο $s = s_0$, τέτοιοι ώστε η σχέση

$$\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0$$

να ικανοποιείται και οι σύνθετοι πίνακες να έχουν πλήρη τάξη στο $s = s_0$.

Η $\{s_0\}$ -ισοδυναμία διατηρεί μόνο τους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες των $A_1(s), A_2(s) \in P(m, l)$ της μορφής $(s - s_0)^i, i > 0$.

1.4 Ρητοί πίνακες

1.4.1 Εισαγωγή

Έστω $\mathbb{R}[s]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και $\mathbb{R}(s)$ το σώμα των ρητών συναρτήσεων πάνω στο $\mathbb{R}[s]$ δηλαδή

$$\mathbb{R}(s) := \left\{ t(s) : t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \in \mathbb{R}[s] \text{ με } d(s) \neq 0 \right\}.$$

Οι $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}(s)$ ονομάζονται ρητοί πίνακες και το σύνολό τους συμβολίζεται με $\mathbb{R}(s)^{m \times n}$. Το σύνολο των πολυωνυμικών πινάκων περιέχεται προφανώς σε αυτό των ρητών πινάκων.

1.4.2 Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων

Αντίστοιχα με τους πολυωνυμικούς πίνακες, η μονομετρική ισοδυναμία μπορεί να επεκταθεί και στο σώμα των ρητών πινάκων ως εξής.

Ορισμός 19 Δύο ρητοί πίνακες $A(s)$ και $B(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ ονομάζονται **μονομετρικά ισοδύναμοι (unimodular equivalent) στο \mathbb{C}** αν-ν υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ και $V(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε

$$B(s) = U(s)A(s)V(s).$$

Στην περίπτωση που $B(s) = U(s)A(s)$ (αντίστοιχα $B(s) = A(s)V(s)$) οι πίνακες ονομάζονται αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) μονομετρικά ισοδύναμοι.

Η κανονική μορφή της μονομετρικής ισοδυναμίας στο σώμα των ρητών πινάκων είναι η Smith-McMillan μορφή.

Θεώρημα 20 [Var91] Κάθε ρητός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ είναι μονομετρικά ισοδύναμος με ένα διαγώνιο ρητό πίνακα της μορφής

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) := \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0_{m-r, n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$$

όπου $\varepsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{R}[s]$ για $i = 1, \dots, r$. Ο πίνακας $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}$ ονομάζεται **Smith-McMillan μορφή** του πίνακα $A(s)$ στο \mathbb{C} , ενώ τα $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$ ονομάζονται **αναλλοιώτες ρητές συναρτήσεις** του $A(s)$. Επιπλέον τα $\varepsilon_i(s), \psi_i(s)$ έχουν μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα, είναι πρώτα μεταξύ τους και έχουν την ιδιότητα $\varepsilon_i(s) | \varepsilon_{i+1}(s)$ και $\psi_{i+1}(s) | \psi_i(s)$ για κάθε $i = 1, \dots, r-1$. Οι ρίζες των $\varepsilon_i(s)$, $i = 1, \dots, r$ ονομάζονται **πεπερασμένα μηδενικά** του $A(s)$. Αντίστοιχα οι ρίζες των $\psi_i(s)$, $i = 1, \dots, r$ ονομάζονται **πεπερασμένοι πόλοι** του $A(s)$.

Οι αναλλοιώτες συναρτήσεις απεικονίζουν πλήρως την πεπερασμένη αλγεβρική δομή ενός ρητού πίνακα.

Ορίζουμε τώρα στο σώμα των ρητών συναρτήσεων $\mathbb{R}(s)$ την εξής απεικόνιση $\delta_\infty : \mathbb{R}(s) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$

$$\delta_\infty(t(s)) = \begin{cases} \deg d(s) - \deg n(s) & t(s) \neq 0 \\ +\infty & t(s) = 0 \end{cases}.$$

Η παραπάνω απεικόνιση είναι μια διακριτή εκτίμηση στο $\mathbb{R}(s)$ και κάθε $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ μπορεί να γραφεί

$$t(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{q_\infty} \frac{n_1(s)}{d_1(s)}$$

όπου $q_\infty = \delta_\infty(t(s))$ και $\deg n_1(s) = \deg d_1(s)$. Αν $q_\infty > 0$ τότε η συνάρτηση $t(s)$ έχει ένα **μηδενικό** πολλαπλότητας q_∞ στο $s = \infty$, ενώ αντίθετα αν $q_\infty < 0$ η $t(s)$ έχει ένα **πόλο** πολλαπλότητας $-q_\infty$ στο $s = \infty$.

Ορισμός 21 [Var91] Μια ρητή συνάρτηση $t(s)$ ονομάζεται **κανονική** (*proper*) αν-ν $\delta_\infty(t(s)) \geq 0$, **αυστηρά κανονική** (*strictly proper*) αν-ν $\delta_\infty(t(s)) > 0$ και **δικανονική** (*biproper*) αν-ν $\delta_\infty(t(s)) = 0$.

Το σύνολο των κανονικών ρητών συναρτήσεων έχοντας ορίσει σαν βαθμό την δ_∞ αποδεικνύεται ότι είναι ευκλείδειος δακτύλιος, με μονάδες του δακτυλίου τις ρητές δικανονικές συναρτήσεις και συμβολίζεται με $\mathbb{R}_{pr}(s)$. Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}_{pr}(s)$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times n}$ και οι πίνακες που το αποτελούν ονομάζονται ρητοί κανονικοί πίνακες.

Ενώ η μονομετρική ισοδυναμία διατηρεί αναλλοίωτη την πεπερασμένη δομή στοιχειωδών διαιρετών, η παρακάτω ισοδυναμία αφήνει αναλλοίωτη τη δομή ενός ρητού πίνακα στο ∞ .

Ορισμός 22 [Var91] Δύο ρητοί πίνακες $A(s)$ και $B(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ ονομάζονται **μονομετρικά ισοδύναμοι στο ∞** αν-ν υπάρχουν μονομετρικοί πίνακες $U(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times m}$ και $V(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε

$$B(s) = U(s)A(s)V(s).$$

Στην περίπτωση που $B(s) = U(s)A(s)$ ($B(s) = A(s)V(s)$) οι πίνακες ονομάζονται **αριστερά** (αντίστοιχα **δεξιά**) **μονομετρικά ισοδύναμοι στο ∞** .

Η παραπάνω σχέση είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η κανονική μορφή της μονομετρικής ισοδυναμίας στο ∞ είναι η Smith-McMillan μορφή στο ∞ .

Θεώρημα 23 [Var91] Κάθε ρητός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$ είναι μονομετρικά ισοδύναμος στο ∞ με ένα διαγώνιο ρητό πίνακα της μορφής

$$S_{A(s)}^\infty(s) := \text{diag} \left\{ \left[s^{q_1} \quad \dots \quad s^{q_k} \quad \frac{1}{s^{\hat{q}_k+1}} \quad \dots \quad \frac{1}{s^{\hat{q}_r}} \quad 0_{m-r, n-r} \right] \right\} \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$$

Ο πίνακας $S_{A(s)}^\infty(s)$ ονομάζεται **Smith-McMillan μορφή** του πίνακα $A(s)$ στο ∞ . Οι δείκτες q_i και \hat{q}_i έχουν την ιδιότητα

$$\begin{aligned} q_1 &\geq q_2 \geq \dots \geq q_k \geq 0 \\ \hat{q}_r &\geq \hat{q}_{r-1} \geq \dots \geq \hat{q}_{k+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Ο πίνακας $A(s)$ έχει μηδενικά στο $s = \infty$ με πολλαπλότητες $\hat{q}_r, \dots, \hat{q}_{k+1}$ και πόλους στο $s = \infty$ με πολλαπλότητες q_1, \dots, q_k .

Ας θεωρήσουμε τώρα την Smith-McMillan μορφή ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ στο ∞ .

Θεώρημα 24 [Var91] Έστω ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ και

$$S_{A(s)}^\infty(s) = \text{diag} \left\{ \left[s^{q_1} \quad \dots \quad s^{q_k} \quad \frac{1}{s^{\hat{q}_k+1}} \quad \dots \quad \frac{1}{s^{\hat{q}_r}} \quad 0_{m-r, n-r} \right] \right\} \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$$

η Smith-McMillan μορφή του στο ∞ . Τότε οι **στοιχειώδεις διαιρέτες στο $s = 0$** του $\tilde{A}(s)$ είναι της μορφής

$$s^{\mu_i}, \quad i = 1, \dots, r$$

όπου τα μ_i δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mu_i &= q_1 - q_i, \quad i = 1, \dots, k \\ \mu_i &= q_1 + \hat{q}_i, \quad i = k + 1, \dots, r \end{aligned}$$

Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο $s = 0$ του δικού ενός πολυωνυμικού πίνακα μπορούν να χωριστούν σε δύο είδη. Αυτούς που αντιστοιχούν στους πόλους του $A(s)$ στο ∞ και έχουν δείκτες $i = 1, \dots, k$ και αυτούς που αντιστοιχούν στα μηδενικά του $A(s)$ στο ∞ με δείκτες $i = k + 1, \dots, r$.

1.5 Ελάχιστη βάση πολυωνυμικών πινάκων και απαλείφουσες

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα $rank_{\mathbb{F}}(\cdot)$, $\ker_{\mathbb{F}}(\cdot)$ και $\text{Im}_{\mathbb{F}}(\cdot)$ για να δηλώσουμε αντίστοιχα την βαθμίδα, δεξιό πυρήνα και την εικόνα (column span) του πίνακα στις παρενθέσεις πάνω από τον χώρο \mathbb{F} . Επίσης με $\ker_{\mathbb{F}}^L(\cdot)$ και $\text{Im}_{\mathbb{F}}^L(\cdot)$ θα συμβολίζουμε τον αριστερό πυρήνα και την εικόνα (row span) του αντίστοιχου πίνακα πάνω από τον χώρο \mathbb{F} . Στην περίπτωση που παραλειφθεί το \mathbb{F} σε κάποιο από τους παραπάνω συμβολισμούς εννοείται το \mathbb{R} . Αν $m \in \mathbb{N}^+$ τότε με \mathbf{m} συμβολίζουμε το σύνολο $\{1, 2, \dots, m\}$.

Έστω $F(s) \in \mathbb{R}[s]^{(p+m) \times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)} F(s) = m$ και $E(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times (p+m)}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)} E(s) = p$ πολυωνυμικοί πίνακες τέτοιοι ώστε

$$E(s)F(s) = 0. \quad (1.7)$$

Όταν η (1.7) ικανοποιείται και ο $E(s)$ είναι επιπλέον κανονικός κατά γραμμές και αριστερά αντιστρέψιμος, ο $E(s)$ είναι μια **ελάχιστη πολυωνυμική βάση** [For75] του διανυσματικού χώρου ρητών συναρτήσεων που παράγει τον αριστερό πυρήνα του $F(s)$ και οι βαθμοί γραμμών $\deg_{ri} E(s) =: \mu_i$, $i \in \mathbf{p}$ του $E(s)$ είναι οι αναλλοίωτοι δείκτες γραμμών του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ ή απλούστερα οι **αριστεροί ελάχιστοι δείκτες** του $F(s)$. Αντίστοιχα όταν η (1.7) ικανοποιείται με τον $F(s)$ να είναι επιπλέον κανονικός κατά στήλες και δεξιό αντιστρέψιμος, τότε ο $F(s)$ είναι μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση [For75] του διανυσματικού χώρου ρητών συναρτήσεων που παράγει τον δεξιό πυρήνα του $E(s)$ και οι βαθμοί στηλών $\deg_{ci} F(s) =: k_i$, $i \in \mathbf{m}$ του $F(s)$ είναι οι αναλλοίωτοι δείκτες στηλών του δεξιού πυρήνα του $E(s)$ ή απλούστερα οι **δεξιοί ελάχιστοι δείκτες** του $E(s)$.

Δεδομένου ενός πολυωνυμικού πίνακα $F(s) \in \mathbb{R}[s]^{(p+m) \times m}$ και $k, a, b \in \mathbb{N}^+$ ορίζουμε τους πίνακες

$$S_{a,b}(s) := [I_a, sI_a, \dots, s^{b-1}I_a]^T \in \mathbb{R}[s]^{ba \times a} \quad (1.8)$$

και

$$X_k(s) := S_{p+m,k}(s)F(s) \in \mathbb{R}[s]^{(p+m)k \times m}. \quad (1.9)$$

Η εξίσωση (1.9) είναι η βάση για την κατασκευή των γενικευμένων απαλειφουσών (resultants). Έστω ότι $F(s) = F_0 + sF_1 + \dots + s^q F_q$, $F_i \in \mathbb{R}^{(p+m) \times m}$. Τότε

$$X_k(s) = R_k S_{m,q+k}(s) \quad (1.10)$$

όπου R_k

$$R_k := \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_0 & F_1 & \dots & F_q & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F_0 & F_1 & \dots & F_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+m)k \times m(q+k)}. \quad (1.11)$$

Ο πίνακας R_k είναι γνωστός [BKAK78] σαν η **γενικευμένη απαλείφουσα του Sylvester** (generalized Sylvester resultant) του $F(s)$.

Έστω $k_i = \deg_{s_i} F(s)$, $i = 1, \dots, m$ οι βαθμοί κατά στήλες του $F(s)$. Αντίστοιχα με την [Wol74] (σελ 242) το $X_k(s)$ γράφεται σαν

$$X_k(s) = M_{ek} \underset{i=1, \dots, m}{\text{block diag}} \{S_{1, k_i+k}(s)\} \quad (1.12)$$

όπου $M_{ek} \in \mathbb{R}^{(m+p)k \times (mk + \sum_{i=1}^m k_i)}$. Ο πίνακας M_{ek} ονομάζεται [AVK98] η **γενικευμένη απαλείφουσα του Wolovich** (generalized Wolowich resultant) του $F(s)$.

Γράφοντας τον πίνακα $F(s)$ σαν $F(s) = [f_1(s), f_2(s), \dots, f_m(s)]$ όπου $f_i(s) = f_{i0} + s f_{i1} + \dots + s^{k_i} f_{ik_i} \in \mathbb{R}[s]^{(m+p) \times 1}$, $i \in \mathbf{m}$ είναι οι στήλες του $F(s)$, μπορούμε να δούμε ότι

$$M_{ek} = [R_k^1, R_k^2, \dots, R_k^m] \quad (1.13)$$

όπου

$$R_k^i = \begin{bmatrix} f_{i0} & f_{i1} & \dots & f_{ik_i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{i0} & f_{i1} & \dots & f_{ik_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{i0} & f_{i1} & \dots & f_{ik_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+p)k \times (k_i+k)}, \quad i \in \mathbf{m}$$

είναι η γενικευμένη Sylvester απαλείφουσα της στήλης $f_i(s)$, $i \in \mathbf{m}$ του $F(s)$. Έχει αποδειχθεί ότι οι δύο γενικευμένες απαλείφουσες συνδέονται μέσω της σχέσης

$$R_k = [M_{ek}, 0_{(m+p)k,b}]P_k \quad (1.14)$$

όπου $P_k \in \mathbb{R}^{m(q+k) \times m(q+k)}$ είναι ένας πίνακας μετάθεσης. Παρατηρούμε ότι το R_k περιέχει τουλάχιστον $b = mq - \sum_{i=1}^m k_i$, όπου $q = \max_{i \in \mathbf{m}} \{k_i\}$ μηδενικές στήλες [ZC83] και ότι προφανώς ισχύει $\text{rank}R_k = \text{rank}M_{ek}$.

Θεώρημα 25 [BKAK78], [AV04a] Έστω $E(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times (p+m)}$ μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ όπως στην 1.7 και έστω $\mu_i = \deg_{r_i} E(s)$, $i \in \mathbf{p}$ οι αριστεροί ελάχιστοι δείκτες του $F(s)$. Τότε ισχύει

$$\text{rank}R_k = \text{rank}M_{ek} = (p+m)k - \sum_{i:\mu_i \leq k} (k - \mu_i). \quad (1.15)$$

1.6 Πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες

Μια ειδική περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων που έχουν ιδιαίτερη εφαρμογή στη μελέτη ιδιάζόντων γραμμικών συστημάτων, είναι οι πολυωνυμικοί πίνακες πρώτου βαθμού. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την δομή πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων (matrix pencils), δηλαδή πινάκων της μορφής

$$A(s) = sE - A \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}.$$

Πριν συνεχίσουμε την ανάλυση της δομής αυτών των πινάκων, θα παρουσιάσουμε μια ισοδυναμία μεταξύ πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων.

Ορισμός 26 [Gan59] Δύο πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s)$ και $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ ονομάζονται **αυστηρά ισοδύναμοι** αν-ν υπάρχουν σταθεροί και αντιστρέψιμοι πίνακες $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ και $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε

$$A_2(s) = MA_1(s)N.$$

Προφανώς η μονομετρική ισοδυναμία πολυωνυμικών πινάκων που παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο τόσο στο \mathbb{C} όσο και στο ∞ , συνεχίζει

να ισχύει και για τους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες. Το πλεονέκτημα της αυστηρής ισοδυναμίας είναι ότι διατηρεί ταυτόχρονα την πεπερασμένη και την άπειρη φασματική δομή των πινάκων. Το μειονέκτημά της είναι ότι συνδέει πίνακες ίδιων διαστάσεων και ίδιου βαθμού (πρωτοβάθμιους). Αυτά τα βασικά μειονεκτήματα αντιμετωπίστηκαν σε μεγάλο βαθμό στα πλαίσια αυτής της διατριβής στις [KVV04], [KVV01], με την εισαγωγή της έννοιας της ισοδυναμίας στοιχειωδών διαιρετών, η οποία συνδέει κανονικούς πολυωνυμικούς πίνακες ανόμοιων διαστάσεων και βαθμών διατηρώντας ταυτόχρονα αναλλοίωτη την πεπερασμένη και άπειρη δομή των στοιχειωδών διαιρετών.

Η κανονική μορφή της αυστηρής ισοδυναμίας είναι η γνωστή ως Kronecker μορφή.

Θεώρημα 27 [Gan59] *Κάθε πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $sE - A \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ είναι αυστηρά ισοδύναμος με έναν επίσης πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα της μορφής*

$$K(s) = \begin{bmatrix} sI_p - J_{\mathbb{C}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sJ_{\infty} - I_{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{\varepsilon}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{\eta}(s) \end{bmatrix}$$

ο οποίος ονομάζεται **Kronecker κανονική μορφή** του $sE - A$. Το $p \times p$ block $sI_p - J_{\mathbb{C}}$ αντιστοιχεί στα πεπερασμένα μηδενικά (στοιχειώδεις διαιρέτες) του πίνακα, με τον $J_{\mathbb{C}}$ να είναι σε κανονική Jordan μορφή. Αντίστοιχα το δεύτερο $\mu \times \mu$ block $sJ_{\infty} - I_{\mu}$ αντιστοιχεί στους στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο και τον πίνακα J_{∞} να είναι σε Jordan μορφή με όλα τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με το μηδέν. Το block $L_{\varepsilon}(s)$ (αντίστοιχα $L_{\eta}(s)$) είναι ένας block διαγώνιος πίνακας, που αποτελείται από μη τετράγωνα blocks $L_{\varepsilon_i}(s)$, $i = 1, \dots, r$ (αντίστοιχα $L_{\eta_i}(s)$ $i = 1, \dots, l$) της μορφής

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon_i}(s) &= sM_{\varepsilon_i} - N_{\varepsilon_i} \in \mathbb{R}[s]^{\varepsilon_i \times (\varepsilon_i + 1)} \\ L_{\eta_i}(s) &= sM_{\eta_i}^{\top} - N_{\eta_i}^{\top} \in \mathbb{R}[s]^{(\eta_i + 1) \times \eta_i} \end{aligned}$$

με

$$M_{\varepsilon_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\varepsilon_i \times (\varepsilon_i+1)}$$

$$N_{\eta_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times (\eta_i+1)}.$$

Το block $L_{\varepsilon_i}(s)$ ($L_{\eta_i}(s)$) ονομάζεται δεξιό (αριστερό) Kronecker block και οι ακέραιοι ε_i (η_i) είναι οι δεξιοί (αριστεροί) Kronecker δείκτες του $sE - A$. Επιπλέον αν συμβολίσουμε με

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i$$

$$\eta = \sum_{i=1}^l \eta_i$$

τότε ισχύει

$$m = p + \mu + \varepsilon + \eta + l$$

$$n = p + \mu + \varepsilon + \eta + r.$$

Η Kronecker κανονική μορφή απεικονίζει πλήρως όχι μόνο τους στοιχειώδεις διαιρέτες στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ αλλά και την δομή που οφείλεται σε έλλειμμα τάξης στις γραμμές και στήλες του πίνακα. Τα blocks $J_{\mathbb{C}}$ και J_{∞} απεικονίζουν σε Jordan μορφή τους πεπερασμένους και άπειρους διαιρέτες. Όταν ο $sE - A$ είναι κανονικός, δηλαδή τετράγωνος και με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, η Kronecker μορφή γίνεται ως εξής

$$K(s) = \begin{bmatrix} sI_p - J_{\mathbb{C}} & 0 \\ 0 & sJ_{\infty} - I_{\mu} \end{bmatrix}$$

και ταυτίζεται με την γνωστή **Weierstrass μορφή**.

1.7 Αντίστροφοι πολυωνυμικών πινάκων

Είναι γνωστό ότι κάθε αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ έχει μοναδικό αντίστροφο που συμβολίζεται με A^{-1} τέτοιο ώστε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.

Οι γενικευμένοι αντίστροφοι ολοκληρωτικών και διαφορικών τελεστών προηγήθηκαν ιστορικά από αυτούς των πινάκων. Η έννοια των γενικευμένων αντιστρόφων ξεκίνησε από τον Fredholm [Fre03] το 1903, όπου ορίστηκε ένας συγκεκριμένος γενικευμένος αντίστροφος (ψευδοαντίστροφος) ενός ολοκληρωτικού τελεστή. Η κλάση όλων των ψευδοαντιστρόφων χαρακτηρίστηκε από τον Hurwitz το 1912 [Hur12]. Οι γενικευμένοι αντίστροφοι διαφορικών τελεστών μελετήθηκαν από πολλούς συγγραφείς όπως ο Hilbert, ο Myller (1906), ο Westfall (1909), κλπ. Μία εξαιρετική ιστορική αναδρομή του θέματος αποτελεί η [Rei68]. Η ύπαρξη γενικευμένων αντιστρόφων σταθερών πινάκων παρατηρήθηκε από τον Moore, που όρισε ένα μοναδικό αντίστροφο για κάθε πεπερασμένης διάστασης όχι κατ'ανάγκη τετράγωνου πίνακα. Η πρώτη δημοσίευσή του Moore για τον γενικευμένο αντίστροφο έγινε το 1920 [Moo20], ενώ περισσότερες λεπτομέρειες για τις σκέψεις του όσον αφορά τους γενικευμένους αντίστροφους δημοσιεύθηκαν μετά τον θάνατό του [MB35]. Το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας για τους γενικευμένους αντίστροφους ήταν μειωμένο μέχρι την δεκαετία του 1950, όταν ο Bjerhammar [Bje51b], [Bje51a], [Bje58] ανακάλυψε την σχέση τους με την λύση γραμμικών συστημάτων. Το 1955 ο Penrose [Pen55] επέκτεινε τα αποτελέσματα του Bjerhammar, δείχνοντας επιπλέον ότι ο γενικευμένος αντίστροφος του Moore είναι ένας μοναδικός πίνακας που ικανοποιεί τις τέσσερις ιδιότητες που θα περιγραφτούν παρακάτω. Η ανακάλυψη αυτών των ιδιοτήτων ήταν τόσο σημαντική, που αυτός ο μοναδικός πίνακας έμεινε γνωστός σαν ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος. Από το 1955 και μετά, εκατοντάδες δημοσιεύσεις σχετικά με τους γενικευμένους αντίστροφους και τις εφαρμογές τους εμφανίστηκαν στην βιβλιογραφία. Οι έννοιες των γενικευμένων αντιστρόφων σταθερών πινάκων, γενικεύτηκαν σε δακτυλίους όπως οι ρητοί πολυωνυμικοί πίνακες κλπ. Μια

εκτενής εισαγωγή στους γενικευμένους αντίστροφους υπάρχει στα βιβλία του Ben-Israel [BIG03] και [BIG74].

Ορισμός 28 [Pen55] Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (αντίστοιχα $A \in \mathbb{C}^{p \times m}$), υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας που θα συμβολίζεται $A^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times p}$ (αντίστοιχα $A^\dagger \in \mathbb{C}^{m \times p}$) και που ονομάζεται Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος, ο οποίος ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$AA^\dagger A = A, \quad (1.16)$$

$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \quad (1.17)$$

$$(AA^\dagger)^* = AA^\dagger, \quad (1.18)$$

$$(A^\dagger A)^* = A^\dagger A, \quad (1.19)$$

όπου με A^* συμβολίζεται ο ανάστροφος συζυγής του A . Στην ειδική περίπτωση όπου ο A είναι τετράγωνος και αντιστρέψιμος, τότε ο γενικευμένος αντίστροφος συμπίπτει με τον συνηθισμένο αντίστροφο.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον πολυωνυμικό πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ (αντίστοιχα $A(s) \in \mathbb{C}[s]^{p \times m}$)

$$A(s) = A_q s^q + \dots + A_1 s + A_0 \quad (1.20)$$

όπου $A_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (αντίστοιχα $A_i \in \mathbb{C}^{p \times m}$), $i = 0, \dots, q$ και το p όχι κατ' ανάγκη ίσο με το m .

Έχοντας σαν ερέθισμα την μελέτη δυναμικών συστημάτων που μοντελοποιούνται με διαφορικές εξισώσεις, εμφανίστηκε στην βιβλιογραφία ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος ενός πολυωνυμικού πίνακα σαν γενίκευση του ορισμού 28.

Ορισμός 29 Για κάθε πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ (αντίστοιχα $A(s) \in \mathbb{C}[s]^{p \times m}$), υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας που θα συμβολίζεται $A(s)^\dagger \in \mathbb{R}(s)^{m \times p}$ (αντίστοιχα $A(s)^\dagger \in \mathbb{C}(s)^{m \times p}$) και που ονομάζεται ο Moore-Penrose γενικευμένος

αντίστροφος που ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$A(s)A(s)^\dagger A(s) = A(s) \quad (1.21)$$

$$A(s)^\dagger A(s)A(s)^\dagger = A(s)^\dagger \quad (1.22)$$

$$(A(s)A(s)^\dagger)^* = A(s)A(s)^\dagger \quad (1.23)$$

$$(A(s)^\dagger A(s))^* = A(s)^\dagger A(s) \quad (1.24)$$

όπου με $A(s)^*$ συμβολίζεται ο ανάστροφος συζυγής του $A(s)$. Στην ειδική περίπτωση όπου ο $A(s)$ είναι τετράγωνος και αντιστρέψιμος, τότε ο γενικευμένος αντίστροφος συμπίπτει με τον συνηθισμένο αντίστροφο.

Η έρευνα σχετικά με τους γενικευμένους αντίστροφους πολυωνυμικών πινάκων απασχόλησε την επιστημονική κοινότητα ([Dec65], [FF63], [FMV91], κλπ). Οι εφαρμογές του γενικευμένου αντίστροφου στην Θεωρία Αυτομάτου Ελέγχου περιλαμβάνουν την μελέτη των γνωστών ως και αντίστροφων συστημάτων, την λύση αυτοπαλλινδρομων παραστάσεων διακριτού χρόνου [GKBM01] και την λύση πολυωνυμικών διοφαντικών εξισώσεων που με την σειρά τους δίνουν απάντηση σε σημαντικά προβλήματα ελέγχου (δες για παράδειγμα [Kar97] και τις αναφορές εκεί).

Ένας επίσης ενδιαφέρων για τις ιδιότητες του γενικευμένου αντίστροφου, ο οποίος ορίζεται μόνο για τετράγωνους πίνακες, είναι ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος.

Ορισμός 30 [Dra58] Ορίζω ως Drazin γενικευμένο αντίστροφο ενός τετράγωνου πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, τον μοναδικό πίνακα που θα συμβολίζεται με $A^D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$$A^{k+1}A^D = A^k \text{ για } k := \text{ind}(A) := \min(k \in \mathbb{N}^+ : \text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1})), \quad (1.25)$$

$$A^D A A^D = A^D, \quad (1.26)$$

$$A A^D = A^D A. \quad (1.27)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος συμπίπτει με τον κλασικό αντίστροφο του A δηλαδή $A^D = A^{-1}$.

Ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος μελετήθηκε από τον Drazin το 1958 στην [Dra58], στο γενικό πλαίσιο δακτυλίων και ημιομάδων χωρίς καμία ειδική αναφορά σε πίνακες. Οι εφαρμογές του Drazin γενικευμένου αντίστροφου είναι πολλές και σε διάφορους κλάδους των επιστημών, κυρίως εξαιτίας της παρακάτω πολύ ενδιαφέρουσας ιδιότητάς τους.

Θεώρημα 31 [BIG74, page 167]. *Οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του Drazin γενικευμένου αντίστροφου ενός πίνακα, είναι οι αντίστροφες των μη μηδενικών ιδιοτιμών του αρχικού πίνακα και τα αντίστοιχα (γενικευμένα) ιδιοανύσματα έχουν ίδιο βαθμό (grade).*

Ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος έχει εφαρμογές στην θεωρία αυτομάτου ελέγχου και πιο συγκεκριμένα στην λύση ιδιαζόντων συστημάτων ([Cam80] και [Cam82]), στον βέλτιστο έλεγχο [Cam76], [Cam77], στην κρυπτογραφία [HL81], στην θεωρία πεπερασμένων αλυσίδων Markov [Mey75], [Mey82] κλπ.

Ο ορισμός 30 γενικεύεται στην περίπτωση πολυωνυμικών πινάκων ως εξής:

Ορισμός 32 *Ορίζω ως Drazin γενικευμένο αντίστροφο ενός τετράγωνου πολυωνυμικού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$, τον μοναδικό πίνακα που θα συμβολίζεται με $A(s)^D \in \mathbb{R}(s)^{m \times m}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

$$A(s)^{k+1}A(s)^D = A(s)^k \text{ για} \tag{1.28}$$

$$k = \text{ind}(A(s)) = \min(k \in \mathbb{N} : \text{rank}(A(s)^k) = \text{rank}(A(s)^{k+1})),$$

$$A(s)^D A(s) A(s)^D = A(s)^D, \tag{1.29}$$

$$A(s) A(s)^D = A(s)^D A(s). \tag{1.30}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας $A(s)$ είναι αντιστρέψιμος, ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος συμπίπτει με τον κλασσικό αντίστροφο του πολυωνυμικού πίνακα, δηλαδή $A(s)^D = A(s)^{-1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αντίστροφοι πολυωνυμικών πινάκων μιας μεταβλητής

2.1 Εισαγωγή

2.1.1 Ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος

Το πρόβλημα του υπολογισμού του (Moore-Penrose γενικευμένου) αντίστροφου ερευνήθηκε από πολλούς συγγραφείς. Στην περίπτωση *τετράγωνων και αντιστρέψιμων σταθερών πινάκων*, οι Faddeev και Faddeeva [FF63] και οι Zadeh και Desoer [ZD63] πρότειναν αλγορίθμους για τον εύρωστο υπολογισμό του αντιστρόφου. Η λύση που προτάθηκε από τους παραπάνω συγγραφείς γενικεύθηκε στην περίπτωση *τετράγωνων και αντιστρέψιμων πολυωνυμικών πινάκων* από τους Mertzios [Mer84] και Fragulis [Φρα90]. Στην περίπτωση *ιδιαζόντων σταθερών πινάκων*, ένας αλγόριθμος για την εύρεση του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου προτάθηκε από τον Decell [Dec65], ο οποίος γενικεύθηκε για πολυωνυμικούς πίνακες από τον Karampetakis [Kar97].

Θεώρημα 33 [Kar97] Έστω ο πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ όπως στη σχέση (1.20) και

$$\begin{aligned} a(z, s) &= \det [zI_p - A(s)A(s)^T] \\ &= a_0(s)z^p + a_1(s)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(s)z + a_p(s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

με $a_0(s) = 1$, το χαρακτηριστικό πολύωνυμο του γινομένου $A(s)A(s)^\top$. Έστω k τέτοιο ώστε $a_p(s) \equiv 0, \dots, a_{k+1}(s) \equiv 0$ ενώ $a_k(s) \neq 0$ και $\Lambda := \{s_i \in \mathbb{R} : a_k(s_i) = 0\}$. Τότε ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος $A(s)^\dagger$ του $A(s)$ για $s \in \mathbb{R} - \Lambda$ δίνεται από

$$A(s)^\dagger = -\frac{1}{a_k(s)} A(s)^\top B_{k-1}(s) \quad (2.2)$$

με

$$B_{k-1}(s) = \left[(A(s)A(s)^\top)^{k-1} + a_1(s) (A(s)A(s)^\top)^{k-2} + \dots + a_{k-1}(s) I_p \right]$$

αν $k > 0$ ενώ αν $k = 0$ τότε $A(s)^\dagger = 0$. Για τα $s_i \in \Lambda$, έστω ο μέγιστος ακέραιος $k_i < k$ τέτοιος ώστε $a_{k_i}(s_i) \neq 0$ και τότε ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος $A(s_i)^\dagger$ του $A(s_i)$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$A(s_i)^\dagger = -\frac{1}{a_{k_i}(s_i)} A(s_i)^\top$$

$$B_{k_i-1}(s_i) = \left[(A(s_i)A(s_i)^\top)^{k-1} + a_1(s_i) (A(s_i)A(s_i)^\top)^{k-2} + \dots + a_{k_i-1}(s_i) I_p \right] \quad (2.3)$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να υλοποιηθεί σχετικά εύκολα σε συμβολικές γλώσσες προγραμματισμού όπως *Mathematica*TM και *Maple*TM, παρουσιάζει όμως απογοητευτικά αποτελέσματα όσον αφορά την ταχύτητα εκτέλεσης και την απαιτούμενη μνήμη. Τα παραπάνω προβλήματα ξεπεράστηκαν από τους Karampetakis και Vologianidis στις [KV02a], [KV03a], όπου προτάθηκε για πρώτη φορά ένας αριθμητικός αλγόριθμος βασισμένος σε τεχνικές υπολογισμού/παρεμβολής (evaluation/interpolation) και στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier.

2.1.2 Ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος

Ο υπολογισμός του Drazin γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα, μελετήθηκε από αρκετούς συγγραφείς. Πιο κάτω παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος που εμφανίστηκε στις [SK00] και [KS01].

Θεώρημα 34 [SK00], [KS01] Έστω ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ και

$$a(z, s) := \det [zI_m - A(s)] = a_0(s)z^m + a_1(s)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(s)z + a_m(s) \quad (2.4)$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A(s)$ με $a_0(s) \equiv 1$, $z \in \mathbb{C}$. Έστω επίσης η παρακάτω ακολουθία από $m \times m$ πολυωνυμικούς πίνακες

$$B_j(s) = a_0(s)A(s)^j + a_1(s)A(s)^{j-1} + \cdots + a_j(s)I_m, \quad a_0(s) = 1, \quad j = 0, \dots, m. \quad (2.5)$$

Έστω $t \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$a_m(s) = 0, \dots, a_{t+1}(s) = 0, \quad a_t(s) \neq 0,$$

το παρακάτω σύνολο

$$\Lambda = \{s_i \in \mathbb{C} : a_t(s_i) = 0\}$$

και $r \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$B_m(s) = \dots = B_r(s) = 0, \quad B_{r-1}(s) \neq 0. \quad (2.6)$$

Ορίζουμε

$$k = r - t. \quad (2.7)$$

Όταν $s \in \mathbb{C} - \Lambda$ και $k > 0$, ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος του $A(s)$ δίνεται από

$$A(s)^D = (-1)^{k+1} a_t(s)^{-k-1} A(s)^k B_{t-1}(s)^{k+1}. \quad (2.8)$$

Όταν $s \in \mathbb{C} - \Lambda$ και $k = 0$, έχουμε

$$A(s)^D = 0.$$

Για τα $s_i \in \Lambda$, συμβολίζοντας με t_i τον μεγαλύτερο ακέραιο που ικανοποιεί την σχέση $a_{t_i}(s_i) \neq 0$ ενώ με r_i τον ελάχιστο ακέραιο που ικανοποιεί την σχέση $B_{r_i}(s_i) = 0$, ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος δίνεται από

$$A(s_i)^D = (-1)^{k_i+1} a_{t_i}(s_i)^{-k_i-1} A(s_i)^{k_i} B_{t_i-1}(s_i)^{k_i+1}$$

όπου $k_i = r_i - t_i$.

Όπως και ο αλγόριθμος που περιγράφεται στο Θεώρημα 33, ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντιστρόφου είναι εύκολα υλοποιήσιμος σε συμβολικές γλώσσες προγραμματισμού, παρουσιάζοντας όμως απογοητευτικά αποτελέσματα όσον αφορά την ταχύτητα εκτέλεσης και την απαιτούμενη μνήμη. Όπως και στην περίπτωση του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου ενός πολυωνυμικού πίνακα τα παραπάνω προβλήματα ξεπεράστηκαν στις [KV02a], [KV03a], όπου προτάθηκε για πρώτη φορά ένας αριθμητικός αλγόριθμος βασισμένος σε τεχνικές υπολογισμού/παρεμβολής (evaluation/interpolation) και του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.

2.1.3 Παρεμβολή πολυωνύμων

Οι κλασικοί αλγόριθμοι για υπολογισμούς με πολυώνυμα (ή και πολυωνυμικούς πίνακες), χρησιμοποιούν στοιχειώδεις πράξεις με τους συντελεστές των πολυωνύμων (ή των αντίστοιχων πινάκων). Η ταχύτητα εκτέλεσης αυτών των αλγορίθμων μειώνεται πολύ γρήγορα σε σχέση με τους βαθμούς και τις διαστάσεις των πινάκων, ενώ η σχετική ακρίβεια των υπολογισμών είναι μικρή. Μια άλλη αντιμετώπιση είναι να χρησιμοποιηθούν συμβολικοί υπολογισμοί πράγμα που είναι εφικτό μόνο για σχετικά απλά προβλήματα.

Οι τεχνικές υπολογισμού/παρεμβολής αποδείχθηκαν ιδιαίτερα σημαντικές για την ανάπτυξη εύρωστων αλγορίθμων σε διάφορες αλγεβρικούς υπολογισμούς, ιδίως σε αυτούς στους οποίους συμμετέχουν πολυώνυμα ή πολυωνυμικοί πίνακες [TI61]. Η πιο γενική θεώρηση του προβλήματος για πολυωνυμικούς πίνακες, έγινε στην [AG93], γενικεύοντας τις [Dav63] και [Dav75]. Ας θεωρήσουμε τον πίνακα $A(s)$ όπως στην (1.20) και μια πολυωνυμική συνάρτηση με πραγματικούς συντελεστές f . Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την τιμή του $f(A(s))$. Ο αλγόριθμος βασίζεται στα επόμενα βήματα:

Αλγόριθμος 35 *Αλγόριθμος υπολογισμού/παρεμβολής για πολυωνυμικούς πίνακες.*

1. Υπολογισμός των τιμών του πολυωνυμικού πίνακα σε ένα σύνολο από $R = \deg f(A(s)) + 1$ επιλεγμένους μιγαδικούς αριθμούς $s_i, i = 1, \dots, R$.

Σε αυτό το βήμα καταλήγουμε με R σταθερούς πίνακες $A(s_i)$, $i = 1, \dots, R$.

2. Εφαρμογή της συνάρτησης f στους σταθερούς πίνακες $A(s_i)$, $i = 1, 2, \dots, R$.
3. Υπολογισμός των συντελεστών του πολυωνυμικού πίνακα $f(A(s))$ με κάποια από τις γνωστές μεθόδους παρεμβολής όπως χρησιμοποιώντας τους πίνακες *Vandermonde*, την μέθοδο *Newton* ή την μέθοδο *Lagrange*.

Η αποτελεσματικότητα της παραπάνω τεχνικής έγκειται στην επιλογή κατάλληλων μεθόδων σε καθένα από τα παραπάνω βήματα.

Παράδειγμα 36 Έστω ο παρακάτω πολυωνυμικός πίνακας

$$A(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του $f(A(s))$ όπου

$$f(x) = x^2.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο 35.

1. Ο βαθμός του $f(A(s))$ θα είναι το πολύ ίσος με 2. Άρα έχουμε $R = (2 + 1) = 3$. Υπολογίζουμε τον πίνακα $A(s)$ σε τρία κατάλληλα επιλεγμένα σημεία έστω τα $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$. Έχουμε

$$A(s_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; A(s_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; A(s_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Εφαρμόζοντας την συνάρτηση f στους παραπάνω πίνακες έχουμε

$$f(A(s_0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; f(A(s_1)) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; f(A(s_2)) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Υπολογίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $f(A(s))$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο Lagrange

$$f(A(s)) = \left\{ \begin{bmatrix} L_0(s) & L_1(s) & L_2(s) \end{bmatrix} \otimes I_2 \right\} \begin{bmatrix} f(A(s_0)) \\ f(A(s_1)) \\ f(A(s_2)) \end{bmatrix}$$

όπου

$$L_i(s) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^2 (s - s_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}} (s_i - s_k)}, i = 0, 1, 2.$$

Στην περίπτωσή μας

$$L_0(s) = \frac{1}{2}(s - 1)(s - 2); L_1(s) = -s(s - 2); L_2(s) = \frac{1}{2}s(s - 1),$$

και άρα

$$f(A(s)) = \begin{bmatrix} s^2 + 1 & 2s \\ 2s & s^2 + 1 \end{bmatrix} = A(s)^2.$$

Οι τεχνικές υπολογισμού/παρεμβολής στην Θεωρία Ελέγχου εμφανίστηκαν στην [AG93], όπου και τέθηκε η θεωρητική βάση για τον υπολογισμό/παρεμβολή πολυωνυμικών πινάκων και την επίλυση με τέτοιες τεχνικές κλασσικών προβλημάτων ελέγχου γραμμικών συστημάτων.

Το επόμενο παράδειγμα παρουσιάζει έναν αλγόριθμο πολλαπλασιασμού δύο πολωνύμων με υπολογισμό/παρεμβολή.

Παράδειγμα 37 Έστω δύο πολώνυμα μιας μεταβλητής $a(s) := \sum_{i=0}^{M_1} a_i s^i$ και $b(s) := \sum_{i=0}^{M_2} b_i s^i$ βαθμών M_1 και M_2 αντίστοιχα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα

$$c(s) := \sum_{i=0}^{M_1+M_2} c_i s^i := a(s)b(s). \quad (2.9)$$

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Υπολογίζουμε τις ακολουθίες $\alpha(i) := a(s_i)$, $\beta(i) := b(s_i)$, $i = 0, \dots, (M_1 + M_2)$ έχοντας διαλέξει κατάλληλα σημεία s_i στο μιγαδικό επίπεδο.
2. Υπολογίζουμε το $\psi(i) := \alpha(i)\beta(i)$, $i = 0, \dots, (M_1 + M_2)$.
3. Με την βοήθεια της μεθόδου Newton ή Lagrange, κάνουμε πολυωνυμική παρεμβολή στα σημεία $\psi(i)$, $i = 0, \dots, (M_1 + M_2)$ καταλήγοντας έτσι στο επιθυμητό πολυώνυμο $c(s)$.

Το παρακάτω απλό λήμμα θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στη συνέχεια.

Λήμμα 38 Ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(s) = A_0 + A_1s + \dots + A_qs^q \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ είναι ο μηδενικός πίνακας αν και μόνο αν οι τιμές του σε $q + 1$ διαφορετικά σημεία είναι μηδενικοί πίνακες.

Κοιτώντας το παράδειγμα 37, παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Horner στο πρώτο βήμα και πολυωνυμική παρεμβολή με την μέθοδο του Newton ή του Lagrange στο τρίτο, η πολυπλοκότητα της διαδικασίας, είναι της τάξης του $\mathcal{O}(M_1M_2)$, κάτι που δεν προσφέρει καμία βελτίωση συγκριτικά με τον κλασικό τρόπο πολλαπλασιασμού πολυωνύμων. Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε τρόπους για να βελτιώσουμε αισθητά την αποδοτικότητα του αλγορίθμου 35.

Ένα σημαντικό θέμα στον σχεδιασμό αλγορίθμων, είναι η ακρίβεια των υπολογισμών. Είναι προφανές ότι η ακρίβεια των υπολογισμών εξαρτάται άμεσα από το condition number των σταθερών πινάκων που προκύπτουν στο βήμα 1 του Αλγορίθμου 35. Έτσι γίνεται φανερό ότι η κατάλληλη επιλογή των σημείων παρεμβολής με κριτήριο το condition number των πινάκων $A(s_i)$ να είναι αποδεκτό, είναι ένα αποφασιστικό σημείο του αλγορίθμου. Στο θέμα της ακρίβειας των υπολογισμών θα επανέλθουμε στο Κεφάλαιο 2.1.5 παρακάτω.

2.1.4 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (**D**iscrete **F**ourier **T**ransform - DFT) χρησιμοποιείται σε διάφορους κλάδους της επιστήμης όπως στην επεξεργασία σήματος κλπ. Ακολουθεί ο ορισμός ενός Fourier ζεύγους ακολουθιών.

Ορισμός 39 [DM84] Δύο πεπερασμένου πλήθους μιγαδικές ακολουθίες $X(k)$ και $\tilde{X}(r)$ με $k, r = 0, 1, \dots, M$ λέμε ότι αποτελούν ένα **DFT ζεύγος** αν ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\tilde{X}(r) = \sum_{k=0}^M X(k)W^{-kr} \quad (2.10)$$

και

$$X(k) = \frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \tilde{X}(r)W^{kr} \quad (2.11)$$

όπου

$$W = e^{\frac{2\pi j}{M+1}}. \quad (2.12)$$

Αντίστοιχα για ακολουθίες δύο διαστάσεων έχουμε:

Ορισμός 40 [DM84] Δύο πεπερασμένου πλήθους ακολουθίες $X(k_1, k_2)$ και $\tilde{X}(r_1, r_2)$, $k_i, r_i = 0, 1, \dots, M_i, i = 1, 2$, λέμε ότι αποτελούν ένα **DFT ζεύγος** αν ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\tilde{X}(r_1, r_2) = \sum_{k_1=0}^{M_1} \sum_{k_2=0}^{M_2} X(k_1, k_2)W_1^{-k_1r_1}W_2^{-k_2r_2} \quad (2.13)$$

$$X(k_1, k_2) = \frac{1}{R} \sum_{r_1=0}^{M_1} \sum_{r_2=0}^{M_2} \tilde{X}(r_1, r_2)W_1^{k_1r_1}W_2^{k_2r_2} \quad (2.14)$$

όπου

$$R = (M_1 + 1) \times (M_2 + 1),$$

και

$$W_i = e^{\frac{2\pi j}{M_i+1}}, i = 1, 2. \quad (2.15)$$

Τα σημεία W και (W_1, W_2) στις σχέσεις (2.12) και (2.15) αντίστοιχα ονομάζονται σημεία Fourier. Οι σχέσεις (2.10) και (2.13) αναπαριστούν τον ευθύ διακριτό μετασχηματισμό Fourier, ενώ οι (2.11) και (2.14) τον αντίστροφο.

Μεγάλη ώθηση στην χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, έδωσε ο αλγόριθμος του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (**Fast Fourier Transform** - FFT). Παρόλο που τα κρίσιμα βήματα του FFT είχαν περιγραφεί από τον Gauss το 1805, ο ολοκληρωμένος αλγόριθμος εμφανίστηκε στην βιβλιογραφία

στην [CT65]. Το τεράστιο πλεονέκτημα του FFT σε σχέση με τους συμβατικούς τρόπους υπολογισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, είναι η μειωμένη πολυπλοκότητά του. Η πολυπλοκότητα ενός μονοδιάστατου μετασχηματισμού Fourier ενός διανύσματος $M \in \mathbb{R}^R$ με συμβατικές μεθόδους είναι της τάξης $\mathcal{O}(R^2)$ ενώ με τον FFT μειώνεται σε $\mathcal{O}(R \log R)$. Σημειώνουμε ότι η πολυπλοκότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier (με FFT ή όχι) είναι της ίδιας τάξης με αυτή του ευθύ μετασχηματισμού. Η μελέτη του FFT σαν αλγόριθμου, κατέληξε σε μια πληθώρα έτοιμων βιβλιοθηκών, υλοποιημένων σε διάφορες γλώσσες προγραμματισμού και βελτιστοποιημένες για ηλεκτρονικούς υπολογιστές όλων των αρχιτεκτονικών. Μια πολύ γρήγορη και εκτενώς χρησιμοποιούμενη υλοποίηση του αλγόριθμου FFT μπορεί να βρεθεί στην [FJ98].

Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μιας πραγματικής ακολουθίας $X(k)$, $k = 0, \dots, M$ είναι μια συμμετρικά συζυγής (conjugate symmetric) ακολουθία $F(k)$, $k = 0, \dots, M$ δηλαδή ισχύει

$$F(k) = (F(M - k))^*.$$

Αυτή η ιδιότητα έχει σημαντικές συνέπειες στην οικονομία μνήμης. Μια μιγαδική ακολουθία $F(k)$, $k = 0, \dots, M$, χρειάζεται $2b(M + 1)$ bits για να αποθηκευτεί στην κύρια μνήμη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου b ο αριθμός των bits που καταλαμβάνει ένας πραγματικός αριθμός (συνήθως $b = 32$). Μια συμμετρική συζυγής ακολουθία χρειάζεται μόνο $b(M + 1)$ bits. Η παραπάνω ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο για εξοικονόμηση μνήμης αλλά και σημαντική εξοικονόμηση υπολογιστικής ισχύος.

Επιπλέον χρήσιμες ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε από την πληθώρα βιβλίων για τον μετασχηματισμό Fourier όπως [BH95] κλπ.

Παρατήρηση 41 Παρατηρώντας την σχέση 2.10 που αναπαριστά τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier της ακολουθίας $X(k)$, συμπεραίνουμε ότι μπορεί να θεωρηθεί σαν υπολογισμός των τιμών του πολυωνύμου

$$f(s) := \sum_{k=0}^M X(k)s^k$$

στα Fourier σημεία

$$W^{-r} = e^{\frac{2\pi jr}{M+1}}, \quad r = 0, 1, \dots, M.$$

2.1.5 Παρεμβολή πολυωνύμων και FFT

Ας επανεξετάσουμε για λίγο τον αλγόριθμο 35. Στο δεύτερο βήμα του αλγορίθμου χρειάζεται να βρεθεί ένας αποτελεσματικός τρόπος για τον υπολογισμό του $f(A(s_i))$, όπου $A(s_i)$ σταθερός πίνακας. Η επιλογή αυτή εξαρτάται από το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε. Τα βασικά σημεία του αλγορίθμου που θα βελτιστοποιήσουμε είναι τα βήματα 1 και 3. Πιο κάτω θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε την σχέση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier με τον υπολογισμό και την παρεμβολή πολυωνύμων/πολυωνυμικών πινάκων.

Θεώρημα 42 Διακριτό Θεώρημα Συνέλιξης. Έστω $X(k)$ και $Y(k)$, $k = 0, \dots, M$ δύο ακολουθίες και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier τους $\tilde{X}(k)$ και $\tilde{Y}(k)$, $k = 0, \dots, M$. Τότε ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης $H(k) = X(k) * Y(k)$ είναι ίσος με

$$H(k) = \mathcal{F} \{X(k) * Y(k)\} = (M + 1)\tilde{X}(k)\tilde{Y}(k). \quad (2.16)$$

Άρα ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης είναι ίσος με το γινόμενο των διακριτών μετασχηματισμών Fourier των ακολουθιών. Η παραπάνω ιδιότητα συνήθως αναφέρεται στην βιβλιογραφία λέγοντας ότι η συνέλιξη ακολουθιών (διακριτών σημάτων) στο πεδίο του χρόνου είναι ίση με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων ακολουθιών στο πεδίο των συχνοτήτων.

Στο παράδειγμα 37 παρατηρούμε ότι η ακολουθία των συντελεστών c_i , $i = 0, \dots, M_1 + M_2$ του πολυωνύμου (2.9) παράγεται από την συνέλιξη των ακολουθιών a_i, b_i , $i = 0, \dots, M_1 + M_2$. Θα δούμε παρακάτω πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το Θεώρημα 42 στα βήματα 1 και 3 του αλγορίθμου 35 έτσι ώστε να μειώσουμε την πολυπλοκότητα.

Παράδειγμα 43 Συνέχεια του παραδείγματος 37.

1. Διαλέγουμε σαν σημεία s_i , $i = 0, \dots, M_1 + M_2$ σημεία Fourier. Υπολογίζουμε τα $a(s_i)$, $b(s_i)$, $i = 0, \dots, M_1 + M_2$.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Παρατήρηση 41, αυτό το βήμα μπορεί να υλοποιηθεί με ευθύ μετασχηματισμό Fourier των ακολουθιών

$$\alpha(i) := \begin{cases} a_i, & i = 0, \dots, M_1 \\ 0, & i = M_1 + 1, \dots, M_1 + M_2 \end{cases}$$

και

$$\beta(i) := \begin{cases} a_i, & i = 0, \dots, M_2 \\ 0, & i = M_2 + 1, \dots, M_1 + M_2. \end{cases}$$

Έτσι θέτω

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} & : = \mathcal{F}(\alpha) \\ \tilde{\beta} & : = \mathcal{F}(\beta) \end{aligned}$$

όπου \mathcal{F} ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μιας ακολουθίας.

2. Υπολογίζουμε τα $\tilde{\psi}(i) := \tilde{a}(i)\tilde{b}(i)$, $i = 0, \dots, (M_1 + M_2)$.

3. Με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, υπολογίζω τα

$$\psi = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\psi}),$$

και το πολυώνυμο που ψάχνω είναι το

$$c(s) := \sum_{i=0}^{M_1+M_2} c_i s^i$$

με

$$c_i = \psi(i).$$

Χρησιμοποιώντας στον παραπάνω αλγόριθμο τον γρήγορο μετασχηματισμό Fourier (FFT), συμπεραίνουμε ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου φράσσεται από $\mathcal{O}(M \log M)$, όπου $M = \max\{M_1, M_2\}$, κάτι που συγκρίνοντας με την προηγούμενη απόδοση του αλγορίθμου, δείχνει τα σημαντικά πλεονεκτήματα που προσφέρει η εφαρμογή του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier και των τεχνικών υπολογισμού/παρεμβολής σε αλγεβρικούς υπολογισμούς (δες επίσης [BP94], [Lip76]).

Όσον αφορά την ακρίβεια των αλγεβρικών υπολογισμών με πολυωνυμικούς πίνακες χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 35, στις [HSS99] και [HP02] αποδείχτηκε ότι διαλέγοντας σαν σημεία παρεμβολής τα σημεία Fourier (κάτι που έχει μεγάλα πλεονεκτήματα σε ταχύτητα όπως φάνηκε πιο πάνω) καταλήγουμε σε well conditioned πολυωνυμικούς πίνακες παρεμβολής.

2.2 Αλγόριθμος υπολογισμού του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.

Πιο κάτω παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος που παρουσιάστηκε από τους Karapetakis και Vologiannidis στις [KV02a] και [KV03a] για τον υπολογισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντιστρόφου, ο οποίος βασίζεται σε πολυωνυμική παρεμβολή, το γρήγορο μετασχηματισμό Fourier και το θεώρημα 33.

Από την εξίσωση 2.1, έστω b_1 το άνω όριο του βαθμού του πολυωνύμου δύο μεταβλητών $a(z, s)$ ως προς s και b_0 ο βαθμός του ως προς z . Προφανώς

$$\begin{aligned} \deg_z(a(z, s)) &= p := b_0 \\ \deg_s(a(z, s)) &\leq 2pq := b_1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Τότε το $a(z, s)$ γράφεται

$$a(z, s) = \sum_{k_0=0}^{b_0} \sum_{k_1=0}^{b_1} a_{k_0, k_1} z^{k_0} s^{k_1}. \quad (2.18)$$

Διαλέγουμε τα παρακάτω

$$R_1 := (2pq + 1)(p + 1) \quad (2.19)$$

σημεία παρεμβολής

$$\begin{aligned} u_i(r_j) &= W_i^{-r_j}, i = 0, 1 \text{ με } r_j = 0, 1, \dots, b_i \\ W_i &= e^{\frac{2\pi j}{b_i+1}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_{k_0, k_1} ορίζουμε

$$\tilde{a}_{r_0, r_1} = \det[u_0(r_0)I_p - A(u_1(r_1))A(u_1(r_1))^T]. \quad (2.21)$$

Από τις (2.18), (2.20) και (2.21) έχουμε

$$\tilde{a}_{r_0, r_1} = \sum_{l_0=0}^{b_0} \sum_{l_1=0}^{b_1} a_{l_0 l_1} W_0^{-r_0 l_0} W_1^{-r_1 l_1}. \quad (2.22)$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον τα σημεία που διαλέξαμε είναι σημεία Fourier, από την (2.22), οι ακολουθίες $[a_{l_0 l_1}]$ και $[\tilde{a}_{r_0 r_1}]$ αποτελούν ένας DFT ζεύγος. Έτσι χρησιμοποιώντας την (2.14) παίρνουμε τους συντελεστές του (2.18) από τον τύπο

$$a_{l_0 l_1} = \frac{1}{R_1} \sum_{r_0=0}^{b_0} \sum_{r_1=0}^{b_1} \tilde{a}_{r_0 r_1} W_0^{r_0 l_0} W_1^{r_1 l_1}$$

όπου $l_i = 0, \dots, b_i$ για $i = 0, 1$.

Έχοντας υπολογίσει με μια απλή αναδρομή το k του Θεωρήματος 33, πρέπει να υπολογίσουμε το

$$\begin{aligned} C(s) &:= A(s)^\top B_{k-1}(s) = \\ &= A(s)^\top \left[(A(s)A(s)^\top)^{k-1} + a_1(s) (A(s)A(s)^\top)^{k-2} + \dots + a_{k-1}(s) I_p \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Προφανώς ισχύει

$$\deg(C(s)) \leq \max \{2(k-1)q + q, k = 1, \dots, p\} = (2p-1)q := n. \quad (2.24)$$

Έτσι ο πολυωνυμικό πίνακας γράφεται

$$C(s) = \sum_{l=0}^n C_l s^l. \quad (2.25)$$

Χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα

$$R_2 := (2p-1)q + 1 \quad (2.26)$$

σημεία παρεμβολής

$$\begin{aligned} u(r) &= W^{-r} \text{ με } r = 0, 1, \dots, n \\ W &= e^{\frac{2\pi j}{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ορίζουμε

$$\tilde{C}_r := C(u(r)) \quad (2.28)$$

και χρησιμοποιώντας τις (2.25), (2.27) και (2.28) έχουμε ότι

$$\tilde{C}_r = \sum_{l=0}^n C_l W^{-rl}.$$

Μέσω της (2.14) υπολογίζουμε τα C_l

$$C_l = \frac{1}{R_2} \sum_{r=0}^n \tilde{C}_r W^{rl}.$$

Τέλος έχοντας υπολογίσει τα παραπάνω, ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος δίνεται από την σχέση (2.2).

Έχοντας υπόψιν την παραπάνω θεωρητική περιγραφή του αλγορίθμου, πιο κάτω παρουσιάζεται ο αλγόριθμος με την μορφή ψευδοκώδικα. Σημειώνουμε ότι ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ εσωτερικά αναπαρίσταται από έναν πίνακα $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(q+1) \times p \times m}$ με τα στοιχεία του να συμβολίζονται με $\mathcal{A}(k_1, k_2, k_3)$, για $k_1 = 0, \dots, q$, $k_2 = 0, \dots, p-1$, $k_3 = 0, \dots, m-1$. Επιπλέον θα χρειαστούμε το συμβολισμό $\mathcal{A}(k, *) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ που επιστρέφει τον σταθερό πίνακα συντελεστή του s^k . Για χάρη σαφήνειας στον παρακάτω αλγόριθμο τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε σε κάθε βήμα είναι διαφορετικά.

Αλγόριθμος 44 [KV02a], [KV03a]. **Υπολογισμός του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.**

1. **Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (2.1, 2.18).**

α) Υπολογισμός του αριθμού των σημείων παρεμβολής b_0 και b_1 που χρειάζονται μέσω των σχέσεων (2.17).

β) Ορίζω τον $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times (b_1+1) \times p \times m}$ από τις σχέσεις

$$\mathcal{B}(i, j, *) := \begin{cases} A(j, *) & i = 0, j = 0, \dots, q \\ 0_{p \times m} & i = 0, j = q+1, \dots, b_1 \\ 0_{p \times m} & i = 1, \dots, b_0, j = 0, \dots, b_1 \end{cases}$$

Η παραπάνω διαδικασία προσθέτει μια διάσταση στον πίνακα εισόδου $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{q \times p \times m}$ που αντιστοιχεί στην νέα μεταβλητή s διογκώνοντας τον ταυτόχρονα με μηδενικά.

γ) Υπολογίζω τον δισδιάστατο FFT του \mathcal{B} , το αποτέλεσμα του οποίου αποθηκεύεται στον $\mathcal{B}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times (b_1+1) \times p \times m}$.

δ) Ορίζω τον πίνακα $\mathcal{C}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times (b_1+1) \times p \times p}$ με βάση τις σχέσεις

$$\mathcal{C}_F(i, j, *) := \mathcal{B}_F(i, j, *) (\mathcal{B}_F(i, j, *))^\top \in \mathbb{C}^{p \times p}.$$

ε) Ορίζω τον πίνακα $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times (b_1+1) \times p \times p}$ με βάση τις σχέσεις

$$\mathcal{S}(i, j, *) := \begin{cases} I_p & (i, j) = (1, 0) \\ 0_{p \times p} & (i, j) \neq (1, 0) \end{cases}$$

Ο πίνακας \mathcal{S} παίζει τον ρόλο του zI_p της σχέσης (2.1).

στ) Υπολογίζω τον πολυδιάστατο FFT του \mathcal{S} , το αποτέλεσμα του οποίου αποθηκεύεται στον \mathcal{S}_F .

ζ) Υπολογίζω την διαφορά $\mathcal{D}_F = \mathcal{S}_F - \mathcal{C}_F$.

η) Υπολογίζω τις ορίζουσες των πινάκων $\mathcal{D}_F(i, j, *)$, αποθηκεύοντάς τις σε ένα πίνακα $\mathcal{E}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times (b_1+1)}$.

$$\mathcal{E}_F(i, j) := \det \{ \mathcal{D}_F(i, j, *) \}, \quad i = 0, \dots, b_0, \quad j = 0, \dots, b_1.$$

θ) Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στον \mathcal{E}_F , παίρνω ένα πίνακα $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times (b_1+1)}$ που αντιστοιχεί στους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (2.1, 2.18) ως εξής:

$$a_{i,k} = \mathcal{E}(i, j), \quad i = 0, \dots, b_0, \quad j = 0, \dots, b_1.$$

2. **Εύρεση k τέτοιου ώστε $a_p(s) = 0, \dots, a_{k+1}(s) = 0$ ενώ $a_k(s) \neq 0$.**

α) Εφόσον τα $\mathcal{E}(i, j)$ αντιστοιχούν στους συντελεστές του $z^i s^j$, βρίσκουμε με μια επαναληπτική διαδικασία ένα ακέραιο k τέτοιο ώστε $\mathcal{E}(k, *) \neq 0_{(b_1+1)}$ και $\mathcal{E}(i, *) = 0_{(b_1+1)}$, $0 \leq i < k$.

3. **Υπολογισμός του $C(s) = A(s)^\top B_{k-1}(s)$ στην (2.23).**

α) Θέτω το n με βάση την (2.24).

- β) Ορίζω τον $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{n \times p \times m}$ διογκώνοντας τον \mathcal{A} με μηδενικά.
- γ) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{G} και αποθηκεύω το αποτέλεσμα στο $\mathcal{G}_F \in \mathbb{C}^{n \times p \times m}$.
- δ) Εφόσον $n > b_1$ ορίζω τον $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times (n+1)}$ διογκώνοντας τον $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times (b_1+1)}$ με μηδενικά.
- ε) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{H} αποθηκεύοντας το αποτέλεσμα στον \mathcal{H}_F .
- στ) Υπολογίζω τις (2.23) για τους σταθερούς πίνακες $\mathcal{G}_F(i, *)$ ως εξής

$$\mathcal{G}_F(i, *)^\top \times \left[\sum_{j=1}^{k-1} \left\{ \mathcal{H}_F(p-j, i) \cdot (\mathcal{G}_F(i, *) \times \mathcal{G}_F(i, *)^\top)^{k-1-j} \right\} + \right. \\ \left. + (\mathcal{G}_F(i, *) \times \mathcal{G}_F(i, *)^\top)^{k-1} \right]$$

όπου με \times συμβολίζουμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων και με \cdot τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα. Το αποτέλεσμα αποθηκεύεται στον $\mathcal{J}_F \in \mathbb{C}^{n \times p \times m}$. Αυτό το δήμα μπορεί να υλοποιηθεί με την μέθοδο του Horner για βελτίωση της ταχύτητας και της ακρίβειας των αποτελεσμάτων.

- ζ) Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του \mathcal{J}_F υπολογίζω τον \mathcal{J} και άρα τους συντελεστές του $C(s)$.

4. Επιστρέφω τον αριθμητή και παρονομαστή του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.

- α) Επιστρέφω τον \mathcal{J} και τον $\mathcal{E}(k, *)$.

Στον Πίνακα 2.1 φαίνεται η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σε κάθε ένα από τα βήματα που περιγράφηκαν πιο πάνω. Τα σύμβολα R_1 και R_2 ορίστηκαν παραπάνω στις (2.19) και (2.26). Επίσης θέτουμε $L_1 := \sum_{i=0}^1 \log(b_i + 1)$ (τα b_i όπως στην 2.17) και $L_2 = \log((2p-1)q + 1)$. Αν ονομάσω με $R := \max\{R_1, R_2\}$ και με $L := \max\{L_1, L_2\}$, έχοντας υπ' όψιν μας ότι $p < m$ (μια

Αρ. βήματος	Complexity	Αρ. βήματος	Complexity
1γ	$\mathcal{O}(pmR_1L_1)$	1θ	$\mathcal{O}(R_1L_1)$
1δ	$\mathcal{O}(p^2(2m-1)R_1)$	3γ	$\mathcal{O}(pmR_2L_2)$
1στ	$\mathcal{O}(p^2R_1L_1)$	3ε	$\mathcal{O}(R_2L_2)$
1ζ	$\mathcal{O}(p^2R_1)$	3στ	$\mathcal{O}(kp^3R_2)$
1η	$\mathcal{O}(p^3R_1)$	3ζ	$\mathcal{O}(pmR_2L_2)$

Πίνακας 2.1: Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.

και αν $p > m$ μας συμφέρει να υπολογίσουμε τον $(A(s)^\top)^\dagger$ και ότι στην χειρότερη περίπτωση $k = p$, η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου 44 είναι της τάξης $\mathcal{O}(mp^3RL)$.

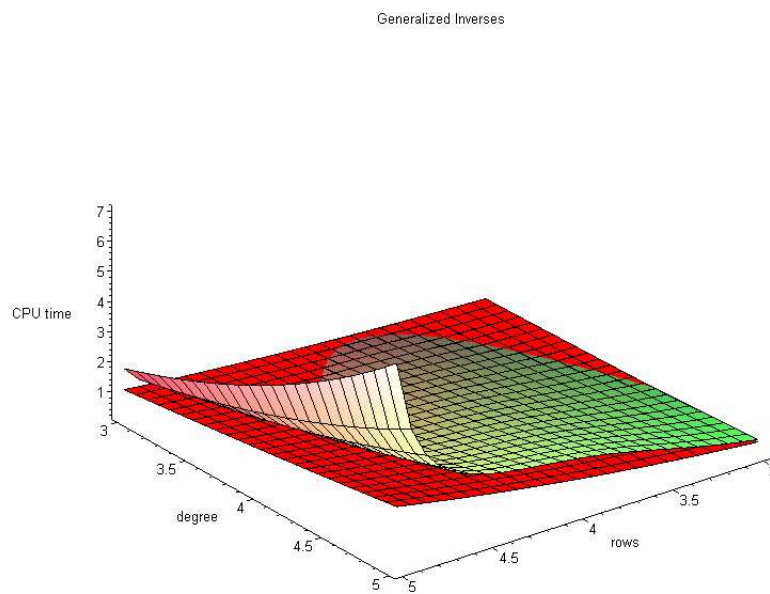
Στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζονται συγκριτικά οι μέσοι χρόνοι εκτέλεσης τυχαίων πολυωνυμικών πινάκων εφαρμόζοντας την μέθοδο που μόλις παρουσιάστηκε και αυτή στην [Kar97]. Ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε στο μαθηματικό πακέτο *Mathematica*TM 4.1. Η ταχύτητα του αλγορίθμου εκτιμήθηκε χρησιμοποιώντας την συνάρτηση "Timing" της *Mathematica*TM που επιστρέφει τον χρόνο (CPU time) σε δευτερόλεπτα. Οι δοκιμές έγιναν σε ένα COMPAQ Presario με CPU Pentium III στα 700MHz και 128Mb μνήμης RAM, χρησιμοποιώντας σαν λειτουργικό τα Windows 2000 Professional. Ένα γράφημα που συγκρίνει τους αλγορίθμους παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1. Η επιφάνεια που βρίσκεται από πάνω αντιστοιχεί στον αλγόριθμο της [Kar97], ενώ αυτή που βρίσκεται από κάτω στον αλγόριθμο 44.

2.3 Αλγόριθμος υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντίστροφου.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος ([KV02a], [KV03a]) για τον υπολογισμό του Drazin γενικευμένου αντιστρόφου που βασίζεται σε πολυωνυμική παρεμβολή, το γρήγορο μετασχηματισμό Fourier και το θεώρημα 34.

Γραμμές (p)	Βαθμός (d)	FFTGI	[Kar97]
2	0	0.055	0.045
3	0	0.107	0.103
4	0	0.050	0.025
5	0	0.110	0.070
2	1	0.105	0.082
3	1	0.120	0.080
4	1	0.131	0.100
5	1	0.040	0.010
2	2	0.175	0.111
3	2	0.077	0.043
4	2	0.310	0.291
5	2	0.511	0.641
2	3	0.133	0.085
3	3	0.340	0.361
4	3	0.130	0.075
5	3	0.301	0.220
2	4	0.328	0.296
3	4	0.560	0.618
4	4	0.606	0.961
5	4	0.151	0.070
2	5	0.826	1.001
3	5	0.281	0.270
4	5	1.382	2.724
5	5	2.304	7.120

Πίνακας 2.2: Χρόνοι εκτέλεσης των δύο αλγορίθμων υπολογισμού του Moore-Penrose γενικευμένου αντιστρόφου.



Σχήμα 2.1: Γράφημα του χρόνου (CPU time) υπολογισμού του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα, σε συνάρτηση με τον αριθμό των γραμμών και το βαθμό του πίνακα.

Από την εξίσωση 2.4, έστω n_1 ο βαθμός του πολυωνύμου δύο μεταβλητών $a(z, s)$ ως προς s και n_2 ως προς z . Προφανώς

$$\begin{aligned} \deg_z(a(z, s)) &= p := b_0 \\ \deg_s(a(z, s)) &\leq mq := b_1. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Τότε το $a(z, s)$ γράφεται

$$a(z, s) = \sum_{k_0=0}^{b_0} \sum_{k_1=0}^{b_1} a_{k_0, k_1} z^{k_0} s^{k_1}. \quad (2.30)$$

Διαλέγουμε τα παρακάτω

$$R_1 := (2mq + 1)(m + 1) \quad (2.31)$$

σημεία παρεμβολής

$$\begin{aligned} u_i(r_j) &= W_i^{-r_j}, i = 0, 1 \text{ με } r_j = 0, 1, \dots, b_i \\ W_i &= e^{\frac{2\pi j}{b_i+1}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_{k_0, k_1} ορίζουμε

$$\tilde{a}_{r_0, r_1} = \det[u_0(r_0)I_m - A(u_1(r_1))]. \quad (2.33)$$

Από τις (2.30), (2.32) και (2.33) έχουμε

$$\tilde{a}_{r_0, r_1} = \sum_{l_0=0}^{b_0} \sum_{l_1=0}^{b_1} a_{l_0 l_1} W_0^{-r_0 l_0} W_1^{-r_1 l_1}. \quad (2.34)$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον τα σημεία που διαλέξαμε είναι σημεία Fourier, από την (2.34), τα $[a_{l_0 l_1}]$ και $[\tilde{a}_{r_0 r_1}]$ αποτελούν ένας DFT ζεύγος. Έτσι χρησιμοποιώντας την (2.14) παίρνουμε τους συντελεστές του (2.30) από τον τύπο

$$a_{l_0 l_1} = \frac{1}{R_1} \sum_{r_0=0}^{b_0} \sum_{r_1=0}^{b_1} \tilde{a}_{r_0 r_1} W_0^{r_0 l_0} W_1^{r_1 l_1}$$

όπου $l_i = 0, \dots, b_i$ για $i = 0, 1$.

Υπολογίζουμε με μια απλή αναδρομή το t του Θεωρήματος 34.

Θεωρούμε τους πίνακες $B_j(s)$ στην (2.5). Πρέπει να υπολογίσουμε ένα $r \geq t$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (2.6). Χρησιμοποιώντας αναδρομή, το λήμμα 38 και

$$\hat{R}_j = jq + 1, j = r - 1, \dots, m \quad (2.35)$$

Fourier σημεία παρεμβολής της μορφής

$$u(r) = W^{-r}, W = e^{\frac{2\pi j}{n_j+1}},$$

είναι δυνατόν να υπολογιστεί το r .

Θεωρούμε το

$$C(s) := A(s)^k B_{t-1}(s)^{k+1}. \quad (2.36)$$

Η μεγαλύτερη δύναμη του s που μπορεί να εμφανιστεί στην παραπάνω παράσταση είναι

$$n = (t - 1)q(k + 1) + qk. \quad (2.37)$$

και ο $C(s)$ γράφεται

$$C(s) = \sum_{l=0}^n C_l s^l. \quad (2.38)$$

Άρα ο πολυωνυμικός πίνακας $C(s)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα επόμενα

$$R_2 = (t - 1)q(k + 1) + qk + 1 \quad (2.39)$$

σημεία παρεμβολής

$$u(r) = W^{-r}, W = e^{\frac{2\pi j}{n+1}}. \quad (2.40)$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές C_i ορίζω

$$\tilde{C}_r = C(u(r)) \quad (2.41)$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.37), (2.40), η (2.41) γίνεται

$$\tilde{C}_r = \sum_{l=0}^n C_l W^{-lr}, r = 0, \dots, n$$

που με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, μας δίνει τους συντελεστές του $C(s)$ που ψάχνουμε, δηλαδή

$$C_l = \frac{1}{R_2} \sum_{r=0}^n \tilde{C}_r W^{lr}, l = 0, 1, \dots, n.$$

Αντίστοιχα, η μεγαλύτερη δύναμη του s που εμφανίζεται στην παράσταση

$$c(s) = a_t(s)^{k+1}$$

είναι

$$d = tq(k + 1) \quad (2.42)$$

οπότε το $c(s)$ γράφεται σαν

$$c(s) = \sum_{k=0}^d c_k s^k.$$

Αριθμητικά μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα παρακάτω

$$R_3 = d + 1 \quad (2.43)$$

Fourier σημεία παρεμβολής

$$u(r) = W^{-r}, \quad W = e^{\frac{2\pi j}{n+1}}$$

ορίζοντας

$$\tilde{c}_r := c(u(r)) = \sum_{l=0}^d (c_l) (W^{-rl}).$$

Οπότε οι συντελεστές του $c(s)$ μπορούν να υπολογιστούν με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$c_l = \frac{1}{R_3} \sum_{r=0}^n \tilde{c}_r W^{lr}, \quad l = 0, \dots, d.$$

Έχοντας υπολογίσει όλα τα παραπάνω, είναι δυνατός ο υπολογισμός του Drazin γενικευμένου αντιστρόφου από τον παρακάτω τύπο

$$A(\bar{z})^D = \frac{C(\bar{z})}{c(\bar{z})}.$$

Αλγόριθμος 45 [KV02a], [KV03a]. Υπολογισμός του Drazin γενικευμένου αντιστρόφου.

1. Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (2.4, 2.30).

- α) Υπολογισμός του αριθμού των σημείων παρεμβολής b_0 και b_1 που χρειάζονται μέσω των σχέσεων (2.29).
- β) Ορίζω τον $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times (b_1+1) \times m \times m}$ από τις σχέσεις

$$\mathcal{B}(i, j, *) := \begin{cases} A(j, *) & i = 0, j = 0, \dots, q \\ 0_{m \times m} & i = 0, j = q + 1, \dots, b_1 \\ 0_{m \times m} & i = 1, \dots, b_0, j = 0, \dots, b_1 \end{cases}$$

Η παραπάνω διαδικασία προσθέτει μια διάσταση στον πίνακα εισόδου $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{q \times m \times m}$ που αντιστοιχεί στην νέα μεταβλητή s διογκώνοντάς τον ταυτόχρονα με μηδενικά.

- γ) Υπολογίζω τον δισδιάστατο FFT του \mathcal{B} , το αποτέλεσμα του οποίου αποθηκεύεται στον $\mathcal{B}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times (b_1+1) \times m \times m}$.
- δ) Ορίζω τον πίνακα $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times (b_1+1) \times m \times m}$ με βάση τις σχέσεις

$$\mathcal{S}(i, j, *) := \begin{cases} I_m & (i, j) = (1, 0) \\ 0_{m \times m} & (i, j) \neq (1, 0) \end{cases}$$

Ο πίνακας \mathcal{S} παίζει τον ρόλο του zI_m .

- ε) Υπολογίζω τον πολυδιάστατο FFT του \mathcal{S} , το αποτέλεσμα του οποίου αποθηκεύεται στον \mathcal{S}_F .
- στ) Υπολογίζω την διαφορά $\mathcal{D}_F = \mathcal{S}_F - \mathcal{B}_F$
- ζ) Υπολογίζω τις οριζουσες των πινάκων $\mathcal{D}_F(i, j, *)$ που θυμίζουμε ότι ανήκουν στο $\mathbb{C}^{m \times m}$, αποθηκεύοντάς τις σε ένα πίνακα $\mathcal{E}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times (b_1+1)}$.

$$\mathcal{E}_F(i, j) := \det \{ \mathcal{D}_F(i, j, *) \}, \quad i = 0, \dots, b_0, \quad j = 0, \dots, b_1.$$

- η) Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στον \mathcal{E}_F , παίρνω ένα πίνακα $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times (b_1+1)}$ που αντιστοιχεί στους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (2.4, 2.30) ως εξής:

$$a_{i,k} = \mathcal{E}(i, j), \quad i = 0, \dots, b_0, \quad j = 0, \dots, b_1.$$

2. Υπολογισμός του $a_t(s)$

- α) Εφόσον τα $\mathcal{E}(i, j)$ αντιστοιχούν στους συντελεστές του $z^i s^j$, βρούμε με μια επαναληπτική διαδικασία ένα t τέτοιο ώστε $\mathcal{E}(t, *) \neq 0$ και $\mathcal{E}(i, *) = 0, 0 \leq i < t$.

3. Υπολογισμός $B_{r-1} \neq 0$

- $i = m$
- Do while ($\mathcal{E}_i < \varepsilon$)
- Υπολογίζω τον αριθμό των σημείων παρεμβολής \hat{R}_i μέσω του τύπου (2.35).
- Ορίζω το \mathcal{C}_i διογκώνοντας τον \mathcal{A} με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $\hat{R}_i \times m \times m$.
- Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{C}_i αποθηκεύοντάς τον στον \mathcal{C}_i^F .
- Ορίζω τον \mathcal{D}_i γεμίζοντας τον \mathcal{E} με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $n \times m \times m$.
- Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{D}_i και τον αποθηκεύω στον \mathcal{D}_i^F .
- Υπολογίζω την παράσταση (2.5) αποθηκεύοντας το αποτέλεσμα στο \mathcal{E}_i .
- $i = i - 1$
- END DO
- $r = i$

4. Υπολογισμός του $C(s) := A(s)^k B_{t-1}(s)^{k+1}$

- α) Υπολογίζω τον αριθμό των σημείων παρεμβολής n όπως στην (2.37).
- β) Ορίζω το \mathcal{G} διογκώνοντας τον \mathcal{A} με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $n \times m \times m$.
- γ) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{G} αποθηκεύοντάς τον στον \mathcal{G}_F .
- δ) Ορίζω τον \mathcal{H} γεμίζοντας τον \mathcal{E} με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $n \times m \times m$.

- ε) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{H} και τον αποθηκεύω στον \mathcal{H}_F .
- στ) Υπολογίζω την παράσταση (2.36) χρησιμοποιώντας τους σταθερούς πίνακες \mathcal{G}_F και \mathcal{H}_F . Το αποτέλεσμα το αποθηκεύω στον $\mathcal{J}_F \in \mathbb{C}^{n \times m \times m}$.
- ξ) Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο \mathcal{J}_F υπολογίζω τους συντελεστές του $C(s)$ αποθηκεύοντάς τους στο \mathcal{F} .

5. Υπολογισμός του $a_t(s)^{k+1}$

- α) Οι συντελεστές του $a_t(s)$ αντιστοιχούν στον πολυδιάστατο πίνακα $\mathcal{E}(t, *) \in \mathbb{R}^{b_0+1}$. Δημιουργώ τον πίνακα \mathcal{H} γεμίζοντας τον $\mathcal{E}(t, *)$ με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $(d+1)$ όπου το d ορίζεται στην (2.42).
- β) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{H} και αποθηκεύω το αποτέλεσμα στο \mathcal{H}_F .
- γ) Υπολογίζω την $(k+1)$ δύναμη κάθε στοιχείου του πίνακα \mathcal{H}_F , αποθηκεύοντας το αποτέλεσμα στο \mathcal{I}_F .
- δ) Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο \mathcal{I}_F υπολογίζω τον \mathcal{I} , που αποτελείται από τους συντελεστές του $a_t(\bar{z})^{k+1}$.

6. Επιστρέφω τον αριθμητή και τον παρονομαστή του Drazin γενικευμένου αντιστρόφου

- α) Επιστρέφω τον πίνακα \mathcal{F} και τον πίνακα \mathcal{I} .

Στον Πίνακα 2.3 φαίνεται η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σε καθένα από τα βήματα που περιγράφηκαν πιο πάνω. Τα σύμβολα R_1, R_2, R_3 και \hat{R}_i ορίστηκαν παραπάνω στις (2.31), (2.35), (2.39) και (2.43). Επίσης εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς

$$L_1 = \sum_{i=0}^1 \log(b_i + 1), L_2 = \log(n + 1), L_3 = \log(d + 1)$$

$$\hat{L}_i = \sum_{i=0}^n \log(iq + 2), i = r - 1, \dots, m.$$

Βήμα	Πολυπλοκότητα	Βήμα	Πολυπλοκότητα
1γ	$\mathcal{O}(m^2 R_1 L_1)$	3	$\mathcal{O}\left(\sum_{i=r-1}^m m^3 \hat{R}_i \hat{L}_i\right)$
1ε	$\mathcal{O}(m^2 R_1 L_1)$	4γ	$\mathcal{O}(m^2 R_2 L_2)$
1στ	$\mathcal{O}(m^2 R_1)$	4δ	$\mathcal{O}(R_2 L_2)$
1ζ	$\mathcal{O}(m^3 R_1)$	4στ	$\mathcal{O}(km^3 R_2)$
1η	$\mathcal{O}(R_1 L_1)$	5β, 5γ, 5δ	$\mathcal{O}(R_3 L_3)$

Πίνακας 2.3: Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Drazin γενικευμένου αντίστροφου.

όπου τα b_i , n και d ορίστηκαν στις 2.29, 2.37 και 2.42 αντίστοιχα. Αν ονομάσω με $R = \max\{R_1, R_2, R_3, \hat{R}_i\}$ και με $L = \max\{L_1, L_2, L_3, \hat{L}_i\}$ και έχοντας υπόψιν μας ότι η χειρότερη περίπτωση υπολογιστικά είναι όταν $k = m$, η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου φράσσεται από $\mathcal{O}(m^4 RL)$.

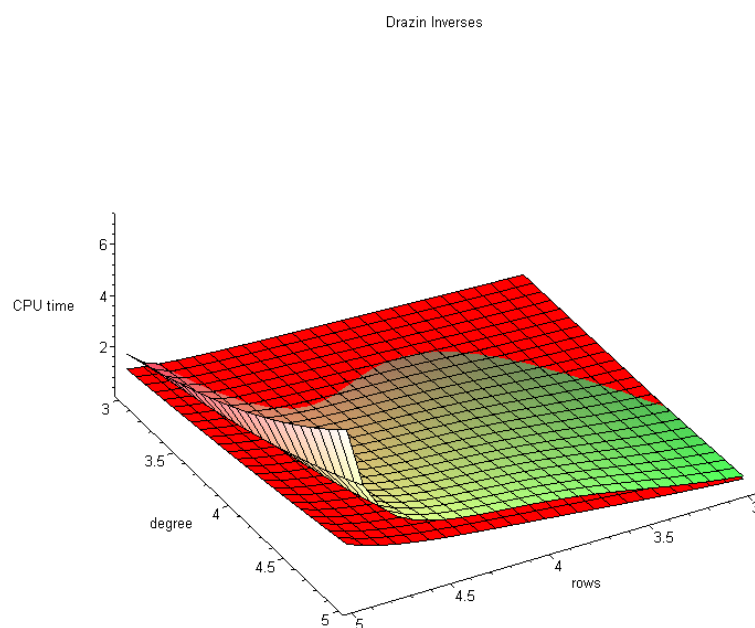
Στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζονται συγκριτικά οι μέσοι χρόνοι εκτέλεσης τυχαίων πολυωνυμικών πινάκων εφαρμόζοντας την μέθοδο που μόλις παρουσιάστηκε και αυτή στην [Kar97]. Ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε σε στο μαθηματικό πακέτο *Mathematica*TM 4.1. Η ταχύτητα του αλγορίθμου εκτιμήθηκε χρησιμοποιώντας την συνάρτηση "Timing" της *Mathematica*TM που επιστρέφει τον χρόνο (CPU time) σε δευτερόλεπτα. Οι δοκιμές έγιναν σε ένα COMPAQ Presario με CPU Pentium III στα 700MHz και 128Mb μνήμης RAM, χρησιμοποιώντας σαν λειτουργικό τα Windows 2000 Professional. Ένα γράφημα που συγκρίνει τους αλγορίθμους παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1.

2.4 Συμπεράσματα

Οι εφαρμογές των Moore-Penrose και Drazin γενικευμένων αντιστρόφων στην θεωρία ελέγχου είναι πολλές και εκτείνονται από την εύρεση λύσεων ιδιαζόντων συστημάτων και την λύση διοφαντικών εξισώσεων μέχρι τον βέλτιστο έλεγχο. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν δύο νέοι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό των Moore-Penrose και Drazin γενικευμένων αντιστρόφων πολυωνυμικών πινάκων. Οι αλγόριθμοι αυτοί βασίζονται στον γρήγορο μετασχη-

Διάσταση (p)	Βαθμός (d)	DFTDI	Stanimirovic & Karampetakis [SK00]
2	0	0.010	0.000
2	1	0.050	0.040
2	2	0.090	0.070
2	3	0.120	0.080
2	4	0.181	0.120
3	0	0.020	0.000
3	1	0.090	0.140
3	2	0.200	0.231
3	3	0.310	0.301
3	4	0.430	0.391
4	0	0.030	0.010
4	1	0.180	0.371
4	2	0.390	0.851
4	3	0.651	1.002
4	4	0.951	1.052
5	0	0.040	0.010
5	1	0.330	0.912
5	2	0.711	1.392
5	3	1.191	2.324
5	4	1.802	2.724

Πίνακας 2.4: Χρόνοι εκτέλεσης των δύο αλγορίθμων υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντιστρόφου.



Σχήμα 2.2: Γράφημα του χρόνου (CPU time) υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντίστροφου, σε συνάρτηση με τον αριθμό των γραμμών και το βαθμό του πίνακα.

ματισμό Fourier και σε τεχνικές υπολογισμού/παρεμβολής. Οι αλγόριθμοι αυτοί συγκρίθηκαν ως προς την ταχύτητα και την ευρωστία τους με δύο από τους ήδη υπάρχοντες αλγόριθμους στην βιβλιογραφία και αποδείχτηκαν πολύ πιο αποδοτικοί. Οι παραπάνω αλγόριθμοι μπορούν να επεκταθούν με κατάλληλο τρόπο για τον υπολογισμό άλλων γενικευμένων αντιστρόφων όπως τους $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ και $\{1, 2, 4\}$ γενικευμένους αντίστροφους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αντίστροφοι πολυωνυμικών πινάκων πολλών μεταβλητών

3.1 Εισαγωγή

Έστω \mathbb{R} το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^{p \times m}$ το σύνολο των πινάκων διαστάσεων $p \times m$. Με $\mathbb{R}[z_1, z_2, \dots, z_n]$ (αντίστοιχα $\mathbb{R}(z_1, z_2, \dots, z_n)$) συμβολίζουμε τα πολυώνυμα (αντίστοιχα ρητές εκφράσεις) με πραγματικούς συντελεστές και μεταβλητές z_1, z_2, \dots, z_n . Το σύνολο των $p \times m$ πίνακες με στοιχεία στο $\mathbb{R}[z_1, z_2, \dots, z_n]$ (αντίστοιχα στο $\mathbb{R}(z_1, z_2, \dots, z_n)$) συμβολίζεται με $\mathbb{R}[z_1, z_2, \dots, z_n]^{p \times m}$ (αντίστοιχα $\mathbb{R}(z_1, z_2, \dots, z_n)^{p \times m}$). Ας θεωρήσουμε τώρα τον nD πολυωνυμικό πίνακα $A(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_n]^{p \times m}$

$$A(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1=0}^{M_1} \sum_{k_2=0}^{M_2} \dots \sum_{k_n=0}^{M_n} (A_{k_1 \dots k_n}) (z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}). \quad (3.1)$$

Για χάρη συντομίας και όπου οι μεταβλητές είναι προφανείς, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό \bar{z} αντί για z_1, z_2, \dots, z_n . Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού δημοσιεύτηκαν από τους Vologiannidis και Karampetakis στις [VK04] και [VK03].

3.1.1 Ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος

Συνεχίζουμε δίνοντας τον ορισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου ενός πολυωνυμικού πίνακα πολλών μεταβλητών.

Ορισμός 46 Για κάθε πίνακα $A(\bar{z}) \in \mathbb{R}[\bar{z}]^{p \times m}$, υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας που θα συμβολίζεται $A(\bar{z})^\dagger \in \mathbb{R}(\bar{z})^{m \times p}$ και που ονομάζεται ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος που ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$A(\bar{z})A(\bar{z})^\dagger A(\bar{z}) = A(\bar{z}) \quad (3.2)$$

$$A(\bar{z})^\dagger A(\bar{z})A(\bar{z})^\dagger = A(\bar{z})^\dagger \quad (3.3)$$

$$(A(\bar{z})A(\bar{z})^\dagger)^* = A(\bar{z})A(\bar{z})^\dagger \quad (3.4)$$

$$(A(\bar{z})^\dagger A(\bar{z}))^* = A(\bar{z})^\dagger A(\bar{z}) \quad (3.5)$$

όπου με $A(\bar{z})^*$ συμβολίζεται ο ανάστροφος συζυγής του $A(\bar{z})$. Στην ειδική περίπτωση όπου ο $A(\bar{z})$ είναι τετράγωνος και αντιστρέψιμος, τότε ο γενικευμένος αντίστροφος συμπίπτει με τον συνηθισμένο αντίστροφο.

Ένας αλγόριθμος για την εύρεση του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα πολλών μεταβλητών είναι ο παρακάτω, που αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 33.

Θεώρημα 47 [VK04] Έστω ο πίνακας $A(\bar{z}) = A(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_n]^{p \times m}$ όπως στη σχέση (3.1) και

$$\begin{aligned} a(\bar{z}, s) &= \det [zI_p - A(\bar{z})A(\bar{z})^\top] \\ &= a_0(\bar{z})s^p + a_1(\bar{z})s^{p-1} + \dots + a_{p-1}(\bar{z})s + a_p(\bar{z}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

με $a_0(\bar{z}) = 1$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του γινομένου $A(\bar{z})A(\bar{z})^\top$. Έστω k τέτοιο ώστε $a_p(\bar{z}) \equiv 0, \dots, a_{k+1}(\bar{z}) \equiv 0$ ενώ $a_k(\bar{z}) \neq 0$ και $\Lambda := \{(\bar{z}) \in \mathbb{C}^n : a_k(\bar{z}) = 0\}$. Τότε ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος $A(\bar{z})^\dagger$ του $A(\bar{z})$ για $s \in \bar{z} \in \mathbb{C}^n - \Lambda$ δίνεται από

$$A(\bar{z})^\dagger = -\frac{1}{a_k(\bar{z})} A(\bar{z})^\top B_{k-1}(\bar{z}) \quad (3.7)$$

με

$$B_{k-1}(\bar{z}) = a_0(\bar{z}) [A(\bar{z})A(\bar{z})^\top]^{k-1} + \dots + a_{k-1}(\bar{z})I_p$$

αν $k > 0$ ενώ αν $k = 0$ τότε $A(\bar{z})^\dagger = 0$. Αν $\bar{z} \in \Lambda$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ξανά τον ίδιο αλγόριθμο.

Απόδειξη. Το Θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί ακολουθώντας παρόμοια βήματα με το αντίστοιχο θεώρημα για σταθερούς πίνακες [Dec65]. ■

3.1.2 Ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος

Ακολουθεί ο ορισμός του Drazin γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα πολλών μεταβλητών.

Ορισμός 48 Για κάθε τετράγωνο πολυωνυμικό πίνακα $A(\bar{z}) \in \mathbb{R}[\bar{z}]^{m \times m}$, υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας $A(\bar{z})^D \in \mathbb{R}(\bar{z})^{m \times m}$, που ονομάζεται Drazin γενικευμένος αντίστροφος που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$$A(\bar{z})^{k+1}A(\bar{z})^D = A(\bar{z})^k \text{ για } k = \text{ind}(A(\bar{z})) = \min(k \in \mathbb{N} : \text{rank}(A(\bar{z})^k) = \text{rank}(A(\bar{z})^{k+1})) \quad (3.8)$$

$$A(\bar{z})^D A(\bar{z}) A(\bar{z})^D = A(\bar{z})^D, \quad (3.9)$$

$$A(\bar{z}) A(\bar{z})^D = A(\bar{z})^D A(\bar{z}) \quad (3.10)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας $A(\bar{z})$ είναι αντιστρέψιμος, ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος συμπίπτει με τον κλασσικό αντίστροφο του, δηλαδή $A(\bar{z})^D = A(\bar{z})^{-1}$.

Ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό του Drazin γενικευμένου αντίστροφου παρουσιάζεται πιο κάτω. Αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 34 και δημοσιεύθηκε στην [VK04].

Θεώρημα 49 [VK04] Έστω ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(\bar{z}) \in \mathbb{R}[\bar{z}]^{m \times m}$ και

$$a(s, z_1, \dots, z_n) = \det[sI_m - A(\bar{z})] = (a_0(\bar{z})s^m + \dots + a_{m-1}(\bar{z})s + a_m(\bar{z})) \quad (3.11)$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A(\bar{z})$ με $a_0(\bar{z}) \equiv 1$, $\bar{z} \in \mathbb{C}^n$. Έστω επίσης η παρακάτω ακολουθία από $m \times m$ πολυωνυμικούς πίνακες

$$B_j(\bar{z}) = a_0(\bar{z})A(\bar{z})^j + \dots + a_{j-1}(\bar{z})A(\bar{z}) + a_j(\bar{z})I_m, \quad a_0(\bar{z}) = 1, j = 0, \dots, m \quad (3.12)$$

Έστω $t \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$a_m(\bar{z}) \equiv 0, \dots, a_{t+1}(\bar{z}) \equiv 0, a_t(\bar{z}) \neq 0,$$

το παρακάτω σύνολο

$$\Lambda = \{\bar{z}_i \in \mathbb{C}^n : a_t(\bar{z}_i) = 0\}$$

και $r \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$B_m(\bar{z}), \dots, B_r(\bar{z}) = 0, B_{r-1}(\bar{z}) \neq 0. \quad (3.13)$$

Ορίζουμε

$$k = r - t. \quad (3.14)$$

Όταν $\bar{z} \in \mathbb{C}^n - \Lambda$ και $k > 0$, ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος του $A(s)$ δίνεται από

$$A(\bar{z})^D = \frac{A(\bar{z})^k B_{t-1}(\bar{z})^{k+1}}{a_t(\bar{z})^{k+1}} A(s)^D. \quad (3.15)$$

με

$$B_{t-1}(\bar{z}) = a_0(\bar{z})A(\bar{z})^{t-1} + \dots + a_{t-2}(\bar{z})A(s) + a_{t-1}(\bar{z})I_m.$$

Όταν $\bar{z} \in \mathbb{C}^n - \Lambda$ και $k = 0$, έχουμε

$$A(s)^D = 0.$$

Για τα $\bar{z}_i \in \Lambda$ χρησιμοποιούμε τον ίδιο αλγόριθμο ξανά.

Απόδειξη. Το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί ακολουθώντας παρόμοια βήματα με το αντίστοιχο θεώρημα για σταθερούς πίνακες [SK00]. ■

3.1.3 Παρεμβολή πολυωνύμων

Ας θεωρήσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα n μεταβλητών $A(\bar{z}) \in \mathbb{R}[\bar{z}]^{p \times m}$ όπως στην (3.1) και μια πολυωνυμική συνάρτηση με πραγματικούς συντελεστές f . Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την τιμή του $f(A(\bar{z}))$. Ο αλγόριθμος βασίζεται στα επόμενα βήματα:

Αλγόριθμος 50 Αλγόριθμος υπολογισμού/παρεμβολής για πολυωνυμικούς πίνακες.

1. Υπολογισμός των τιμών του πολυωνυμικού πίνακα σε ένα σύνολο από $R = \prod_{i=1}^n (\deg_{z_i} (f(A(\bar{z}))) + 1)$ επιλεγμένων n -άδων μιγαδικών αριθμών $\bar{z}_i, i = 1, 2, \dots, R$. Σε αυτό το βήμα καταλήγουμε με R σταθερούς πίνακες $A(\bar{z}_i), i = 1, 2, \dots, R$.
2. Εφαρμογή της συνάρτησης f στους σταθερούς πίνακες $A(\bar{z}_i), i = 1, 2, \dots, R$.
3. Υπολογισμός των συντελεστών του πολυωνυμικού πίνακα $f(A(\bar{z}))$ με κάποια από τις γνωστές μεθόδους παρεμβολής όπως χρησιμοποιώντας τους πίνακες *Vandermonde*, την μέθοδο *Newton* ή την μέθοδο *Lagrange*.

Η αποτελεσματικότητα της παραπάνω τεχνικής έγκειται στην επιλογή κατάλληλων μεθόδων σε κάθε από τα παραπάνω βήματα.

3.1.4 Διακριτός πολυδιάστατος μετασχηματισμός Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) εκτός από την απλή μορφή του για ακολουθίες μιας διάστασης έχει γενικευθεί και για πολυδιάστατες ακολουθίες.

Ορισμός 51 [DM84] Έστω δύο πεπερασμένου πλήθους ακολουθίες $X(k_1, \dots, k_n)$ και $\tilde{X}(r_1, \dots, r_n), k_i, r_i = 0, 1, \dots, M_i$. Οι δύο αυτές ακολουθίες αποτελούν ένα DFT ζεύγος αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\tilde{X}(r_1, \dots, r_n) = \sum_{k_1=0}^{M_1} \sum_{k_2=0}^{M_2} \dots \sum_{k_n=0}^{M_n} X(k_1, \dots, k_n) W_1^{-k_1 r_1} \dots W_n^{-k_n r_n} \quad (3.16)$$

$$X(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{R} \sum_{r_1=0}^{M_1} \sum_{r_2=0}^{M_2} \dots \sum_{r_n=0}^{M_n} \tilde{X}(r_1, \dots, r_n) W_1^{k_1 r_1} \dots W_n^{k_n r_n} \quad (3.17)$$

όπου

$$W_i = e^{\frac{2\pi j}{M_i+1}} \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.18)$$

$$R = \prod_{i=1}^n (M_i + 1). \quad (3.19)$$

Τα σημεία W_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ στις σχέσεις (3.16) και (3.17) αντίστοιχα ονομάζονται σημεία Fourier. Οι σχέσεις (3.16) και (3.16) αναπαριστούν το ευθύ διακριτό μετασχηματισμό Fourier, ενώ οι (3.17) και (3.17) τον αντίστροφο.

Όπως και για την περίπτωση του μονοδιάστατου μετασχηματισμού Fourier, ο γρήγορος υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και του αντίστροφου του γίνεται με τεχνικές FFT. Η πολυπλοκότητα του υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier ενός πολυδιάστατου πίνακα (πολυδιάστατης ακολουθίας) $M \in \mathbb{R}^{m_1 \times \dots \times m_n}$ είναι της τάξης $\mathcal{O}\left(\prod_{i=1}^n m_i^2\right)$, ενώ με τεχνικές FFT μειώνεται δραματικά σε $\mathcal{O}\left(\left(\prod_{i=1}^n m_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \log m_i\right)\right)$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier έχει την ίδια πολυπλοκότητα με τον ευθύ.

3.1.5 Παρεμβολή πολυωνύμων και FFT

Όπως και στο κεφάλαιο 2.1.5, η χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier στα βήματα 1 και 3 του αλγορίθμου 50, έχει σημαντικά υπολογιστικά οφέλη. Το παράδειγμα του πολλαπλασιασμού δύο πολυωνυμικών πινάκων μιας μεταβλητής 43, μπορεί άμεσα να γενικευτεί για πίνακες δύο ή περισσότερων μεταβλητών.

3.2 Αλγόριθμος υπολογισμού του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένας νέος αλγόριθμος για τον υπολογισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικών πινάκων πολλών μεταβλητών, ο οποίος παρουσιάστηκε στις [VK04] και [VK03]. Ο αλγόριθμος βασίζεται σε τεχνικές παρεμβολής, στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier και το θεώρημα 47.

Από την (3.6), οι μεγαλύτερες δυνάμεις των μεταβλητών s, z_1, \dots, z_n που

εμφανίζονται είναι

$$\begin{aligned} \deg_s (a(s, z_1, \dots, z_n)) &= p := b_0 \\ \deg_{z_1} (a(s, z_1, \dots, z_n)) &\leq 2pM_1 := b_1 \\ &\vdots \\ \deg_{z_n} (a(s, z_1, \dots, z_n)) &\leq 2pM_n := b_n. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Έτσι το πολυώνυμο $a(s, z_1, \dots, z_n)$ μπορεί να γραφθεί

$$a(s, z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_0=0}^{b_0} \sum_{k_1=0}^{b_1} \dots \sum_{k_n=0}^{b_n} (a_{k_0 k_1 \dots k_n}) (s^{k_0} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}) \quad (3.21)$$

και μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά χρησιμοποιώντας τα παρακάτω R_1 σημεία Fourier

$$\begin{aligned} u_i(r_j) &= W_i^{-r_j}; i = 0, \dots, n \text{ και } r_j = 0, 1, \dots, b_i \\ W_i &= e^{\frac{2\pi j}{b_i+1}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου

$$R_1 = \prod_{i=0}^n (b_i + 1). \quad (3.23)$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές $a_{k_0 k_1 \dots k_n}$ ορίζουμε

$$\tilde{a}_{r_0 r_1 \dots r_n} = \det [u_0(r_0)I_p - A(u_1(r_1), \dots, u_n(r_n)) [A(u_1(r_1), \dots, u_n(r_n))]^T]. \quad (3.24)$$

Από τις σχέσεις (3.21), (3.22) και (3.23) έχουμε ότι

$$\tilde{a}_{r_0 r_1 \dots r_n} = \sum_{l_0=0}^{b_0} \sum_{l_1=0}^{b_1} \dots \sum_{l_n=0}^{b_n} (a_{l_0 l_1 \dots l_n}) (W_0^{-r_0 l_0} \dots W_n^{-r_n l_n}). \quad (3.25)$$

Οι ακολουθίες $[a_{l_0 l_1 \dots l_n}]$ και $[\tilde{a}_{r_0 r_1 \dots r_n}]$ αποτελούν ένα DFT ζεύγος και άρα με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier βρίσκουμε τους συντελεστές του (3.21) δηλαδή

$$a_{l_0 l_1 \dots l_n} = \frac{1}{R_1} \sum_{r_0=0}^{b_0} \sum_{r_1=0}^{b_1} \dots \sum_{r_n=0}^{b_n} \tilde{a}_{r_0 r_1 \dots r_n} W_0^{r_0 l_0} \dots W_n^{r_n l_n}$$

όπου $l_i = 0, \dots, b_i$.

Έχοντας υπολογίσει με μια απλή αναδρομή το k του Θεωρήματος 47, πρέπει να υπολογίσουμε το

$$\begin{aligned} C(\bar{z}) &= A(\bar{z})^\top B_{k-1}(\bar{z}) = \\ &= A(\bar{z})^\top \left(a_0(\bar{z}) [A(\bar{z})A(\bar{z})^\top]^{k-1} + \dots + a_{k-1}(\bar{z}) I_p \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ισχύει το ακόλουθο

$$\deg_{z_i} (C(s)) \leq \max \{2(k-1)M_i + M_i, k = 1, \dots, p\} = (2p-1)M_i := v_i \quad (3.27)$$

για $i = 1, \dots, n$. Τότε το $C(\bar{z})$ μπορεί να γραφεί

$$C(\bar{z}) = \sum_{l_1=0}^{v_1} \dots \sum_{l_n=0}^{v_n} C_{l_0 \dots l_n} (z_1^{l_1} \dots z_n^{l_n}). \quad (3.28)$$

Υπολογίζουμε το $C(\bar{z})$ με παρεμβολή χρησιμοποιώντας τα παρακάτω R_2 σημεία Fourier

$$\begin{aligned} u_i(r_j) &= W_i^{-r_j}; i = 1, \dots, n \text{ και } r_j = 0, 1, \dots, v_i \\ W_i &= e^{\frac{2\pi j}{n_i+1}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

όπου

$$R_2 = \prod_{i=1}^n \{(2p-1)M_i + 1\}. \quad (3.30)$$

Για να βρεθούν οι συντελεστές $C_{l_0 \dots l_n}$ ορίζουμε το

$$\tilde{C}_{r_1 \dots r_n} = C(u_1(r_1), \dots, u_n(r_n)). \quad (3.31)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.29) και (3.30), η εξίσωση (3.31) γίνεται

$$\tilde{C}_{r_1 \dots r_n} = \sum_{l_1=0}^{v_1} \dots \sum_{l_n=0}^{v_n} C_{l_0 \dots l_n} W_1^{-r_1 l_1} \dots W_n^{-r_n l_n} \quad (3.32)$$

η οποία εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier παίρνει την μορφή

$$C_{l_0 \dots l_n} = \frac{1}{R_2} \sum_{l_1=0}^{v_1} \dots \sum_{l_n=0}^{v_n} \tilde{C}_{r_1 \dots r_n} W_1^{r_1 l_1} \dots W_n^{r_n l_n}$$

όπου $l_i = 0, \dots, v_i$. Τελικά ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος υπολογίζεται μέσω της (3.7).

Έχοντας υπόψη την παραπάνω θεωρητική περιγραφή του αλγορίθμου, πιο κάτω παρουσιάζεται ο αλγόριθμος με την μορφή ψευδοκώδικα. Σημειώνουμε ότι ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(\bar{z}) \in \mathbb{R}[\bar{z}]^{p \times m}$ αναπαρίσταται εσωτερικά από έναν πίνακα $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(M_1+1) \times \dots \times (M_n+1) \times p \times m}$ τα στοιχεία του οποίου θα συμβολίζονται με $\mathcal{A}(k_1, \dots, k_{n+2})$, για $k_i = 0, \dots, M_i$, $i = 1, \dots, n$ και $k_{n+1} = 0, \dots, p-1$, $k_{n+2} = 0, \dots, m-1$. Επιπλέον θα χρειαστούμε το συμβολισμό $\mathcal{A}(k_1, \dots, k_n, *) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ που επιστρέφει τον σταθερό πίνακα συντελεστή του $z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$. Για χάρη σαφήνειας στον παρακάτω αλγόριθμο τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε σε κάθε βήμα είναι διαφορετικά, κάτι που μπορεί εύκολα να αποφευχθεί στην υλοποίησή του για λόγους εξοικονόμησης μνήμης.

Αλγόριθμος 52 [VK04], [VK03]. Υπολογισμός του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.

1. Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (3.21).

α) Υπολογισμός του αριθμού των σημείων παρεμβολής b_i , $i = 0, \dots, n$ που χρειάζονται μέσω των σχέσεων (3.20).

β) Ορίζω τον $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1) \times p \times m}$ από τις σχέσεις

$$\mathcal{B}(k_0, \dots, k_n, *) := \begin{cases} A(k_1, \dots, k_n, *) & k_0 = 0, k_i = 0, \dots, b_i \\ & \text{για } i = 1, \dots, n \\ 0_{p \times m} & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Η παραπάνω διαδικασία προσθέτει μια διάσταση στον πίνακα εισόδου $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(M_1+1) \times \dots \times (M_n+1) \times p \times m}$ που αντιστοιχεί στην νέα μεταβλητή s διογκώνοντάς τον ταυτόχρονα με μηδενικά.

γ) Υπολογίζω τον πολυδιάστατο FFT του \mathcal{B} , το αποτέλεσμα του οποίου αποθηκεύεται στον $\mathcal{B}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1) \times p \times m}$.

δ) Ορίζω τον πίνακα $\mathcal{C}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1) \times p \times p}$ με βάση τις σχέσεις

$$\mathcal{C}_F(k_0, \dots, k_n, *) := \mathcal{B}_F(k_0, \dots, k_n, *) (\mathcal{B}_F(k_0, \dots, k_n, *))^\top \in \mathbb{C}^{p \times p}.$$

ε) Ορίζω τον πίνακα $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1) \times p \times p}$ με δάση τις σχέσεις

$$\mathcal{S}(k_0, \dots, k_n, *) := \begin{cases} I_p & (k_0, \dots, k_n) = (1, 0, \dots, 0) \\ 0_{p \times p} & (k_0, \dots, k_n) \neq (1, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

Ο πίνακας \mathcal{S} παίζει τον ρόλο του sI_p .

στ) Υπολογίζω τον πολυδιάστατο FFT του \mathcal{S} , το αποτέλεσμα του οποίου αποθηκεύεται στον \mathcal{S}_F .

ζ) Υπολογίζω την διαφορά $\mathcal{D}_F = \mathcal{S}_F - \mathcal{C}_F$.

η) Υπολογίζω τις ορίζουσες των πινάκων $\mathcal{D}_F(k_0, \dots, k_n, *) \in \mathbb{C}^{p \times m}$, αποθηκεύοντάς τις σε ένα πίνακα $\mathcal{E}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1)}$

$$\mathcal{E}_F(k_0, \dots, k_n) := \det \{ \mathcal{D}_F(k_0, \dots, k_n, *) \}, \quad k_i = 0, \dots, b_i, \\ i = 0, \dots, n.$$

θ) Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στον \mathcal{E}_F , παίρνω ένα πίνακα $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1)}$ που αντιστοιχεί στους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (3.6, 3.21) ως εξής:

$$a_{k_0, \dots, k_n} = \mathcal{E}(k_0, \dots, k_n), \quad k_i = 0, \dots, b_i.$$

2. **Εύρεση k τέτοιου ώστε $a_p(\bar{z}) = 0, \dots, a_{k+1}(\bar{z}) = 0$ ενώ $a_k(\bar{z}) \neq 0$.**

α) Εφόσον τα $\mathcal{E}(k_0, \dots, k_n)$ αντιστοιχούν στους συντελεστές του γινομένου $s^{k_0} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, βρίσκουμε με μια επαναληπτική διαδικασία ένα ακέραιο k τέτοιο ώστε $\mathcal{E}(k, *) \neq 0_{(b_1+1) \times \dots \times (b_n+1)}$ και $\mathcal{E}(i, *) = 0_{(b_1+1) \times \dots \times (b_n+1)}$, $0 \leq i < k$.

3. **Υπολογισμός του $C(\bar{z}) = A(\bar{z})^\top B_{k-1}(\bar{z})$ στην (3.25).**

α) Υπολογίζω τα v_i μέσω της (3.27).

β) Ορίζω τον $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{v_1 \times \dots \times v_n \times p \times m}$ διογκώνοντας τον \mathcal{A} με μηδενικά.

γ) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{G} και αποθηκεύω το αποτέλεσμα στο $\mathcal{G}_F \in \mathbb{C}^{v_1 \times \dots \times v_n \times p \times m}$.

- δ) Εφόσον $v_i > b_i$, $i = 1, \dots, n$ ορίζω τον $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times (v_1+1) \times \dots \times (v_n+1)}$ διογκώνοντας τον $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1)}$ με μηδενικά.
- ε) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{H} αποθηκεύοντας το αποτέλεσμα στον \mathcal{H}_F .
- στ) Υπολογίζω τις (3.32) για τους σταθερούς πίνακες $\mathcal{G}_F(i, *)$ ως εξής

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_F(k_1, \dots, k_n, *)^\top &\times \left[\sum_{j=1}^{k-1} \{ \mathcal{H}_F(p-j, k_1, \dots, k_n) \cdot \right. \\ &\cdot (\mathcal{G}_F(k_1, \dots, k_n, *) \times \mathcal{G}_F(k_1, \dots, k_n, *)^\top)^{k-1-j} \} + \\ &\left. + (\mathcal{G}_F(k_1, \dots, k_n, *) \times \mathcal{G}_F(k_1, \dots, k_n, *)^\top)^{k-1} \right] \end{aligned}$$

όπου με \times συμβολίζουμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων και με \cdot τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα. Το αποτέλεσμα αποθηκεύεται στον $\mathcal{J}_F \in \mathbb{C}^{(v_1+1) \times \dots \times (v_n+1) \times p \times m}$. Αυτό το δήμα μπορεί να υλοποιηθεί με την μέθοδο του Horner για βελτίωση της ταχύτητας και της ακρίβειας των αποτελεσμάτων.

- ζ) Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του \mathcal{J}_F υπολογίζω τον \mathcal{J} και άρα τους συντελεστές του $C(\bar{z})$.

4. Επιστρέφω τον αριθμητή και παρονομαστή του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.

- α) Επιστρέφω τον \mathcal{J} και τον $\mathcal{E}(k_0, \dots, k_n, *)$.

Πιο κάτω δίνεται η πολυπλοκότητα κάθε βήματος που θεωρείται υπολογιστικά χρονοδότη του αλγορίθμου που μόλις περιγράφηκε. Τα σύμβολα R_1 και R_2 έχουν οριστεί στις σχέσεις (3.23) και (3.30) αντίστοιχα. Χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό

$$L_1 = \sum_{i=0}^n \log(b_i + 1), \quad L_2 = \sum_{i=1}^n \log(n_i + 1).$$

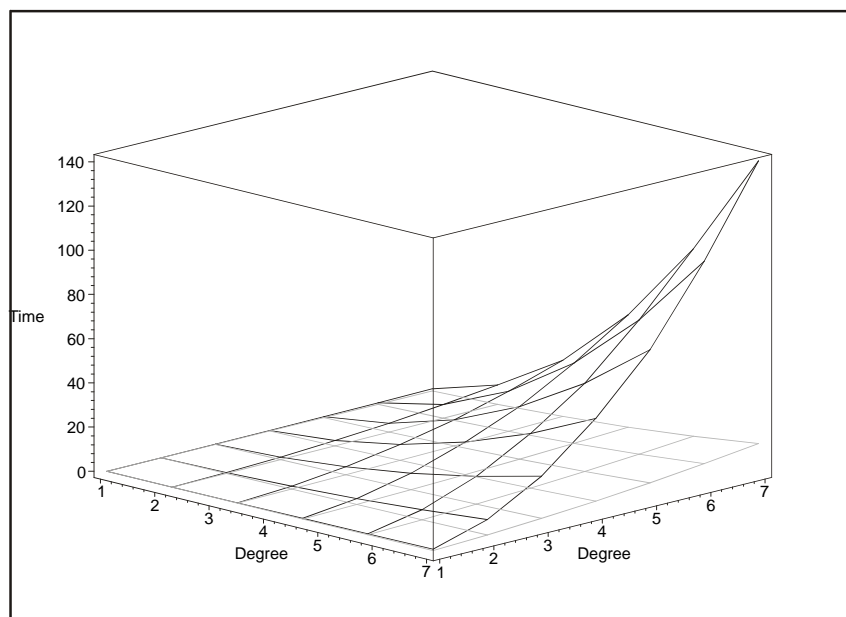
Αν συμβολίσω με $R = \max \{R_1, R_2\}$ και με $L = \max \{L_1, L_2\}$ υποθέτοντας ότι $p < m$ και ότι $k = p$ (η χειρότερη υπολογιστικά περίπτωση), η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου φράσσεται από το $\mathcal{O}(mp^3RL)$.

Αρ. βήματος	Complexity	Αρ. βήματος	Complexity
1γ	$\mathcal{O}(pmR_1L_1)$	1θ	$\mathcal{O}(R_1L_1)$
1δ	$\mathcal{O}(p^2(2m-1)R_1)$	3γ	$\mathcal{O}(pmR_2L_2)$
1στ	$\mathcal{O}(p^2R_1L_1)$	3ε	$\mathcal{O}(R_2L_2)$
1ζ	$\mathcal{O}(p^2R_1)$	3στ	$\mathcal{O}(kp^3R_2)$
1η	$\mathcal{O}(p^3R_1)$	3ζ	$\mathcal{O}(pmR_2L_2)$

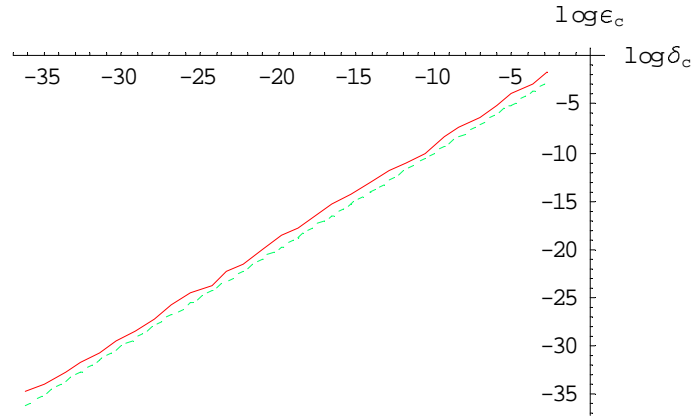
Πίνακας 3.1: Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα πολλών μεταβλητών.

Όπως και στην περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων μιας μεταβλητής ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε στο μαθηματικό πακέτο *Mathematica*TM 4.1. Η ταχύτητα του αλγορίθμου εκτιμήθηκε χρησιμοποιώντας την συνάρτηση "Timing" της *Mathematica*TM που επιστρέφει τον χρόνο (CPU time) σε δευτερόλεπτα. Οι δοκιμές έγιναν σε ένα COMPAQ Presario με CPU Pentium III στα 700MHz και 128Mb μνήμης RAM, χρησιμοποιώντας σαν λειτουργικό τα Windows 2000. Στο παρακάτω γράφημα αναπαρίσταται ο υπολογιστικός χρόνος (CPU Time) που χρειάστηκε για τον υπολογισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου τυχαίων πολυωνυμικών πινάκων δύο μεταβλητών διαστάσεων 3×4 και βαθμών από 1 μέχρι 7. Το γκρι πλέγμα αντιστοιχεί στην μέθοδο με *FFT*, ενώ το μαύρο στην συμβολική μέθοδο. Καλό είναι να σημειωθεί ότι τα πολώνυμα που εμφανίζονται σαν στοιχεία των πινάκων είχαν σχεδόν όλους τους συντελεστές τους μη μηδενικούς.

Τα πλεονεκτήματα του αλγορίθμου με *FFT* είναι εμφανή καθώς ο βαθμός των πινάκων μεγαλώνει. Αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται αν δαλέξουμε να κάνουμε το διάγραμμα του χρόνου σαν συνάρτηση του αριθμού των γραμμών και στηλών των πινάκων, κρατώντας αυτή τη φορά τους βαθμούς σταθερούς. Για να τονιστεί η πολυπλοκότητα του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου, αξίζει να σημειωθεί ότι ο παρονομαστής του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου ενός πολυωνυμικού πίνακα δύο μεταβλητών βαθμού 3 και διαστάσεων 3×4 , είναι βαθμού 18 και έχει 361 όρους, ενώ τα στοιχεία του αριθμητή του είναι βαθμού 15 έχοντας 256 όρους.



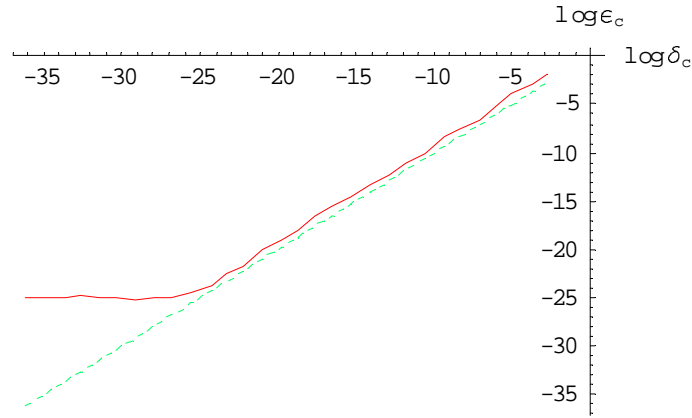
Σχήμα 3.1: Σύγκριση μεταξύ του χρόνου (CPU time) που χρειάζεται για τον υπολογισμό του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 52 (γκρι) και αυτόν του Θεωρήματος 47 (μαύρο)



Σχήμα 3.2: Ανάλυση διαταραχών του παρονομαστή του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.

Παρακάτω παρουσιάζεται μια ανάλυση των λαθών του αλγορίθμου υπολογισμού του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικών πινάκων. Έστω $A(\bar{z})$ ένας τυχαίος πολυδιάστατος πίνακας με ακέραιους συντελεστές. Συμβολίζουμε με $\delta_A(\bar{z}, c)$ έναν πολυωνυμικό πίνακα ίδιων διαστάσεων και βαθμών με τον $A(\bar{z})$ και συντελεστές να ανήκουν στο διάστημα $[-10^{-c}, 10^{-c}]$. Θα ελεγχθεί η σχέση μεταξύ του σχετικού λάθους $\varepsilon_c = \frac{\|(A(\bar{z}) + \delta_A(\bar{z}, c))^+ - A^+(\bar{z})\|_2}{\|A^+(\bar{z})\|_2}$ που εμφανίζεται στον γενικευμένο αντίστροφο και του λάθους $\delta_c = \frac{\|\delta_A(\bar{z}, c)\|_2}{\|A(\bar{z})\|_2}$ που εισάγετε στα αρχικά δεδομένα, όπου με $\|A(\bar{z})\|_2$ συμβολίζεται η 2-νόρμα του block πίνακα των συντελεστών $\begin{bmatrix} A_{0\dots 0} & \cdots & A_{M_1\dots M_n} \end{bmatrix}$ του $A(\bar{z})$. Ο αλγόριθμος θεωρείται καλός αριθμητικά αν το ε_c είναι κοντά στο δ_c . Τα επόμενα γραφήματα δείχνουν σε λογαριθμικές αναλογίες την σχέση μεταξύ του ε_c και δ_c για διάφορες τιμές του c στο διάστημα $[3, 16]$.

Για να είναι ο αλγόριθμος αριθμητικά ευσταθής πρέπει η συνεχής γραμμή στο παραπάνω σχήμα να είναι όσο το δυνατόν κοντά στην διχοτόμο (διακεκομμένη γραμμή). Ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται έξοχα στην περίπτωση του υπολογισμού του παρονομαστή του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου. Στην περίπτωση του υπολογισμού του πίνακα αριθμητή, φαίνεται ότι υπάρχουν κάποια λάθη στρογγυλοποίησης όταν ο αρχικός πίνακας διαταράσσεται με $\delta_A(\bar{z}, c)$ όταν το $c \geq 12$. Αυτό προφανώς οφείλεται στις δυνά-



Σχήμα 3.3: Ανάλυση διαταραχών του αριθμητή του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου.

μεις των πινάκων που υπάρχουν στην (3.26). Η εφαρμογή ειδικών αλγορίθμων όπως ο κανόνας των Horner για τον υπολογισμό της (3.26) μπορεί να αποφέρει σημαντική μείωση στα λάθη στρογγυλοποίησης.

3.3 Αλγόριθμος υπολογισμού του Drazin γενικευμένου αντίστροφου.

Αντίστοιχα με το προηγούμενο κεφάλαιο, θα περιγραφεί ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό του Drazin γενικευμένου αντίστροφου, ο οποίος παρουσιάστηκε στις [VK04] και [VK03].

Από την σχέση (3.11), φαίνεται εύκολα ότι οι μεγαλύτερες δυνάμεις των $(n + 1)$ μεταβλητών που εμφανίζονται στο $a(s, z_1, \dots, z_n)$ είναι

$$\begin{aligned}
 \deg_s (a(s, z_1, \dots, z_n)) &= m := b_0 \\
 \deg_{z_1} (a(s, z_1, \dots, z_n)) &\leq mM_1 := b_1 \\
 &\vdots \\
 \deg_{z_n} (a(s, z_1, \dots, z_n)) &\leq mM_n := b_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Έτσι το πολυώνυμο $a(s, z_1, \dots, z_n)$ μπορεί να γραφτεί σαν

$$a(s, z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_0=0}^{b_0} \sum_{k_1=0}^{b_1} \dots \sum_{k_n=0}^{b_n} (a_{k_0 k_1 \dots k_n}) (s^{k_0} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}) \quad (3.34)$$

και να υπολογιστεί αριθμητικά χρησιμοποιώντας τα παρακάτω R_1 σημεία παρεμβολής

$$u_i(r_j) = W_i^{-r_j}; i = 0, \dots, n \text{ και } r_j = 0, 1, \dots, b_i \quad (3.35)$$

$$W_i = e^{\frac{2\pi j}{b_i+1}}$$

όπου

$$R_1 = \prod_{i=0}^n (b_i + 1). \quad (3.36)$$

Για να υπολογιστούν οι συντελεστές $a_{k_0 k_1 \dots k_n}$ ορίζουμε τα $\tilde{a}_{r_0 r_1 \dots r_n}$ ως εξής

$$\tilde{a}_{r_0 r_1 \dots r_n} = \det [u_0(r_0)I_p - A(u_1(r_1), \dots, u_n(r_n))]. \quad (3.37)$$

Από τις (3.34), (3.35), (3.37) παίρνουμε

$$\tilde{a}_{r_0 r_1 \dots r_n} = \sum_{l_0=0}^{b_0} \sum_{l_1=0}^{b_1} \dots \sum_{l_n=0}^{b_n} (a_{l_0 l_1 \dots l_n}) (W_0^{-r_0 l_0} \dots W_n^{-r_n l_n}). \quad (3.38)$$

Οι ακολουθίες $[a_{l_0 l_1 \dots l_n}]$ και $[\tilde{a}_{r_0 r_1 \dots r_n}]$ αποτελούν ένα DFT ζεύγος και έτσι από την προηγούμενη σχέση και τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να πάρουμε τους συντελεστές της (3.34)

$$a_{l_0 l_1 \dots l_n} = \frac{1}{R_1} \sum_{r_0=0}^{b_0} \sum_{r_1=0}^{b_1} \dots \sum_{r_n=0}^{b_n} \tilde{a}_{r_0 r_1 \dots r_n} W_0^{r_0 l_0} \dots W_n^{r_n l_n} \quad (3.39)$$

όπου $l_i = 0, \dots, b_i$.

Ο υπολογισμός του $a_t(\bar{z})$ του Θεωρήματος 49 είναι απλός και μπορεί να βρεθεί με μια αναδρομή. Έστω ο πίνακας $B_i(\bar{z})$ στην (3.12). Πρέπει να υπολογίσουμε ένα r τέτοιο ώστε η (3.13) να ισχύει. Για να ελεγχθεί αν ο πίνακας $B_i(\bar{z})$ είναι ο μηδενικός πίνακας, χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο του λήμματος 38 για πολυωνυμικούς πίνακες πολλών μεταβλητών. Χρειαζόμαστε

$$\hat{R}_i = \prod_{j=0}^n \underbrace{(iM_j + 1)}_{m_{ij}}, i = r - 1, \dots, m \quad (3.40)$$

Fourier σημεία παρεμβολής. Με μια αναδρομή υπολογίζουμε την τιμή του r . Θα υπολογίσουμε τώρα τον αριθμητή του (3.15), δηλαδή το

$$C(\bar{z}) = A(\bar{z})^k B_{t-1}(\bar{z})^{k+1}. \quad (3.41)$$

Η μεγαλύτερη δύναμη του z_i στην (3.41) είναι

$$v_i = (t-1)(k+1)M_i. \quad (3.42)$$

Το $C(\bar{z})$ γράφεται ως εξής

$$C(\bar{z}) = \sum_{l_1=0}^{v_1} \cdots \sum_{l_n=0}^{v_n} C_{l_0 \dots l_n} (z_1^{l_1} \cdots z_n^{l_n})$$

και υπολογίζεται με παρεμβολή χρησιμοποιώντας τα παρακάτω R_2 σημεία Fourier

$$u_i(r_j) = W_i^{-r_j}; i = 1, \dots, n \text{ και } r_j = 0, 1, \dots, v_i \quad (3.43)$$

$$W_i = e^{\frac{2\pi j}{v_i+1}}$$

όπου

$$R_2 = \prod_{i=1}^n \{(n_i + 1)\}. \quad (3.44)$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές $C_{l_0 \dots l_n}$ ορίζουμε την παρακάτω σχέση

$$\tilde{C}_{r_1 \dots r_n} = C(u_1(r_1), \dots, u_n(r_n)). \quad (3.45)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.42), (3.43), η (3.45) γίνεται

$$\tilde{C}_{r_1 \dots r_n} = \sum_{l_1=0}^{v_1} \cdots \sum_{l_n=0}^{v_n} C_{l_0 \dots l_n} W_1^{-r_1 l_1} \cdots W_n^{-r_n l_n}$$

που μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier γίνεται

$$C_{l_0 \dots l_n} = \frac{1}{R_2} \sum_{l_1=0}^{v_1} \cdots \sum_{l_n=0}^{v_n} \tilde{C}_{r_1 \dots r_n} W_1^{r_1 l_1} \cdots W_n^{r_n l_n}$$

με $l_i = 0, \dots, v_i$. Αντίστοιχα η μεγαλύτερη δύναμη του z_i που εμφανίζεται στο $c(\bar{z}) = a_t(\bar{z})^{k+1}$ είναι

$$d_i = tM_i(k+1) \quad (3.46)$$

και έτσι το $c(\bar{z})$ μπορεί να γραφεί

$$c(\bar{z}) = \sum_{k_1=0}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{d_n} (c_{k_1 \dots k_n}) (z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n})$$

και να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα παρακάτω R_3 σημεία παρεμβολής

$$u_i(r_j) = W_i^{-r_j}; i = 1, \dots, n \text{ και } r_j = 0, 1, \dots, d_i \quad (3.47)$$

$$W_i = e^{\frac{2\pi j}{d_i+1}}$$

με

$$R_3 = \prod_{i=1}^n (d_i + 1). \quad (3.48)$$

Ορίζοντας σαν

$$\tilde{c}_{r_1 \dots r_n} = \sum_{l_1=0}^{d_1} \cdots \sum_{l_n=0}^{d_n} (c_{k_1 \dots k_n}) (W_1^{-r_1 l_1} \dots W_n^{-r_n l_n}) \quad (3.49)$$

και χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε

$$c_{l_1 \dots l_n} = \frac{1}{R_3} \sum_{r_1=0}^{d_1} \cdots \sum_{r_n=0}^{d_n} \tilde{c}_{r_1 \dots r_n} W_1^{r_1 l_1} \dots W_n^{r_n l_n}$$

για $l_i = 0, \dots, d_i$. Ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος μπορεί τώρα να υπολογιστεί από την (3.15) ως εξής

$$A(\bar{z})^D = \frac{C(\bar{z})}{c(\bar{z})}.$$

Ο αλγόριθμος σε μορφή ψευδοκώδικα για τον υπολογισμό του Drazin γενικευμένου αντίστροφου ακολουθεί. Όπως και πριν σαν είσοδο θεωρούμε τον πίνακα $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(M_1+1) \times \dots \times (M_n+1) \times m \times m}$ όπου ο συμβολισμός $A(k_1, \dots, k_n, *) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ επιστρέφει τον σταθερό πίνακα συντελεστή του $z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$.

Αλγόριθμος 53 [KV02a], [KV03a]. Υπολογισμός του Drazin γενικευμένου αντίστροφου.

1. Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (3.11, 3.34).

- α) Υπολογισμός του αριθμού των σημείων παρεμβολής b_i , $i = 0, \dots, n$ που χρειάζονται μέσω των σχέσεων (3.33).

β) Ορίζω τον $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1) \times m \times m}$ από τις σχέσεις

$$\mathcal{B}(k_0, \dots, k_n, *) := \begin{cases} A(k_1, \dots, k_n, *) & k_0 = 0, k_i = 0, \dots, b_i \\ & \text{για } i = 1, \dots, n \\ 0_{p \times m} & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η παραπάνω διαδικασία προσθέτει μια διάσταση στον πίνακα εισόδου $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(M_1+1) \times \dots \times (M_n+1) \times m \times m}$ που αντιστοιχεί στην νέα μεταβλητή s διογκώνοντάς τον ταυτόχρονα με μηδενικά.

γ) Υπολογίζω τον πολυδιάστατο FFT του \mathcal{B} , το αποτέλεσμα του οποίου αποθηκεύεται στον $\mathcal{B}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1) \times m \times m}$.

δ) Ορίζω τον πίνακα $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1) \times m \times m}$ με βάση τις σχέσεις

$$\mathcal{S}(k_0, \dots, k_n, *) := \begin{cases} I_m & (k_0, \dots, k_n) = (1, 0, \dots, 0) \\ 0_{m \times m} & (k_0, \dots, k_n) \neq (1, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

Ο πίνακας \mathcal{S} παίζει τον ρόλο του sI_m .

ε) Υπολογίζω τον πολυδιάστατο FFT του \mathcal{S} , το αποτέλεσμα του οποίου αποθηκεύεται στον \mathcal{S}_F .

στ) Υπολογίζω την διαφορά $\mathcal{D}_F = \mathcal{S}_F - \mathcal{B}_F$.

ζ) Υπολογίζω τις οριζουσες των πινάκων $\mathcal{D}_F(k_0, \dots, k_n, *)$ που θυμίζουμε ότι ανήκουν στο $\mathbb{C}^{m \times m}$, αποθηκεύοντάς τις σε ένα πίνακα $\mathcal{E}_F \in \mathbb{C}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1)}$.

$$\mathcal{E}_F(i, j) := \det \{ \mathcal{D}_F(i, j, *) \}, \quad i = 0, \dots, b_0, \quad k = 0, \dots, b_1.$$

η) Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στον \mathcal{E}_F , παίρνω ένα πίνακα $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{(b_0+1) \times \dots \times (b_n+1)}$ που αντιστοιχεί στους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (3.11, 3.34) ως εξής:

$$a_{k_0, \dots, k_n} = \mathcal{E}(k_0, \dots, k_n), \quad k_i = 0, \dots, b_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

2. Υπολογισμός του $a_t(s)$

- α) Εφόσον τα $\mathcal{E}(k_0, \dots, k_n)$ αντιστοιχούν στους συντελεστές του γινομένου $s^{k_0} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, βρισκόμαστε με μια επαναληπτική διαδικασία ένα ακέραιο t τέτοιο ώστε $\mathcal{E}(t, *) \neq 0_{(b_1+1) \times \dots \times (b_n+1)}$ και $\mathcal{E}(i, *) = 0_{(b_1+1) \times \dots \times (b_n+1)}$, $0 \leq i < t$.

3. Υπολογισμός $B_{r-1} \neq 0$

- $i = m$
- Do while ($\mathcal{E}_i < \varepsilon$)
- Υπολογίζω τον αριθμό των σημείων παρεμβολής \hat{R}_i μέσω του τύπου (3.40).
- Ορίζω το \mathcal{C}_i διογκώνοντας τον \mathcal{A} με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $m_{i1} \times \dots \times m_{in} \times m \times m$.
- Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{C}_i αποθηκεύοντάς τον στον \mathcal{C}_i^F .
- Ορίζω τον \mathcal{D}_i γεμίζοντας τον \mathcal{E} με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $(n_1 + 1) \times \dots \times (n_n + 1)$.
- Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{D}_i και τον αποθηκεύω στον \mathcal{D}_i^F .
- Υπολογίζω την παράσταση (3.12) αποθηκεύοντας το αποτέλεσμα στο \mathcal{E}_i .
- $i = i - 1$
- END DO
- $r = i$

4. Υπολογισμός του $C(s) := A(s)^k B_{t-1}(s)^{k+1}$

- α) Υπολογίζω τον αριθμό των σημείων παρεμβολής v_i όπως στην (3.42).
- β) Ορίζω το \mathcal{G} διογκώνοντας τον \mathcal{A} με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $v_1 \times \dots \times v_n \times m \times m$.
- γ) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{G} αποθηκεύοντάς τον στον \mathcal{G}_F .
- δ) Ορίζω τον \mathcal{H} γεμίζοντας τον \mathcal{E} με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $(v_1 + 1) \times \dots \times (v_n + 1)$.

- ε) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{H} και τον αποθηκεύω στον \mathcal{H}_F .
- στ) Υπολογίζω την παράσταση (3.41) χρησιμοποιώντας τους σταθερούς πίνακες \mathcal{G}_F και \mathcal{H}_F . Το αποτέλεσμα $\mathcal{J}_F \in \mathbb{C}^{(v_1+1) \times \dots \times (v_n+1) \times m \times m}$.
- ζ) Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο \mathcal{J}_F υπολογίζω τους συντελεστές του $C(s)$ αποθηκεύοντάς τους στο \mathcal{F} .

5. Υπολογισμός του $a_t(s)^{k+1}$

- α) Οι συντελεστές του $a_t(s)$ αντιστοιχούν στον πολυδιάστατο πίνακα $\mathcal{E}(t, *)$. Δημιουργώ τον πίνακα \mathcal{H} γεμίζοντας τον $\mathcal{E}(t, *)$ με μηδενικά μέχρι να αποκτήσει διάσταση $(d_1 + 1) \times \dots \times (d_n + 1)$ όπου τα d_i ορίστηκαν στην (3.46).
- β) Υπολογίζω τον FFT του \mathcal{H} και αποθηκεύω το αποτέλεσμα στο \mathcal{H}_F .
- γ) Υπολογίζω την $(k+1)$ δύναμη κάθε στοιχείου του πίνακα \mathcal{H}_F , αποθηκεύοντας το αποτέλεσμα στο \mathcal{I}_F .
- δ) Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο \mathcal{I}_F υπολογίζω τον \mathcal{I} , που αποτελείται από τους συντελεστές του $a_t(\bar{z})^{k+1}$.

6. Επιστρέφω τον αριθμητή και τον παρονομαστή του Drazin γενικευμένου αντίστροφου

- α) Επιστρέφω τον πίνακα \mathcal{F} και τον πίνακα \mathcal{I} .

Στον Πίνακα 3.2 φαίνεται η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σε κάθε από τα βήματα που περιγράφηκαν πιο πάνω. Τα σύμβολα R_1, R_2, R_3 και \hat{R}_i ορίστηκαν παραπάνω στις (3.36), (3.44), (3.48) και (3.40). Επίσης εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς

$$L_1 = \sum_{i=0}^n \log(b_i + 1), L_2 = \sum_{i=1}^n \log(n_i + 1), L_3 = \sum_{i=1}^n \log(d_i + 1)$$

$$\hat{L}_i = \sum_{i=0}^n \log(m_{ij} + 1), i = r - 1, \dots, m.$$

Αν ονομάσω με $R = \max \{R_1, R_2, R_3, \hat{R}_i\}$ και με $L = \max \{L_1, L_2, L_3, \hat{L}_i\}$

Step No	Complexity	Step No	Complexity
1γ	$\mathcal{O}(m^2 R_1 L_1)$	3	$\mathcal{O}\left(\sum_{i=r-1}^m m^3 \hat{R}_i \hat{L}_i\right)$
1ε	$\mathcal{O}(m^2 R_1 L_1)$	3γ	$\mathcal{O}(m^2 R_2 L_2)$
1στ	$\mathcal{O}(m^2 R_1)$	4δ	$\mathcal{O}(R_2 L_2)$
1ζ	$\mathcal{O}(m^3 R_1)$	4στ	$\mathcal{O}(km^3 R_2)$
1η	$\mathcal{O}(R_1 L_1)$	5β, 5γ, 5δ	$\mathcal{O}(R_3 L_3)$

Πίνακας 3.2: Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Drazin γενικευμένου αντίστροφου ενός πολυωνυμικού πίνακα πολλών μεταβλητών.

και έχοντας υπ' όψιν μας ότι η χειρότερη περίπτωση υπολογιστικά είναι όταν $k = m$, η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου φράσσεται από $\mathcal{O}(m^4 RL)$.

Ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε στο μαθηματικό πακέτο *Mathematica*TM 4.1. Όπως και για τον γενικευμένο αντίστροφο Moore-Penrose, η ταχύτητα του αλγορίθμου εκτιμήθηκε χρησιμοποιώντας την συνάρτηση "Timing" της *Mathematica*TM που επιστρέφει τον χρόνο (CPU time) σε δευτερόλεπτα. Τα αποτελέσματα ήταν ανάλογα με αυτά του Moore-Penrose γενικευμένου αντίστροφου όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1. Η ανάλυση διαταραχών του αριθμητή και του παρονομαστή παρουσίασε αντίστοιχα αποτελέσματα με τα σχήματα 3.2 και 3.3.

3.4 Συμπεράσματα

Οι πολυωνυμικοί πίνακες πολλών μεταβλητών εμφανίζονται αρκετά συχνά στην θεωρία αυτομάτου ελέγχου, σε ερευνητικές περιοχές όπως η μελέτη πολυδιάστατων φίλτρων, τα ηλεκτρικά δίκτυα με μεταβλητά στοιχεία, τα αυτοπαλλίνδρομα πολυδιάστατα συστήματα κλπ. Στις αντίστοιχες περιοχές εμφανίζονται πολύ συχνά και οι Moore-Penrose και Drazin γενικευμένοι αντίστροφοι πολυωνυμικών πινάκων. Οι αριθμητικές μέθοδοι που υπάρχουν στην βιβλιογραφία για πράξεις πολυωνυμικών πινάκων με πολλές μεταβλητές είναι αρκετά σπάνιοι κάτι που αναλογιζόμενοι και την πολυπλοκότητά τους, φανερώνει ότι είναι ένας τομέας που χρειάζεται αρκετή έρευνα. Σε αυτό το κε-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Αντίστροφοι πολυωνυμικών πινάκων πολλών μεταβλητών 75

φάλαιο γενικεύσαμε τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2, παρουσιάζοντας δύο νέους αλγόριθμους για τον υπολογισμό των Moore-Penrose και Drazin γενικευμένων αντιστρόφων. Έγινε ανάλυση της ταχύτητας και των αριθμητικών λαθών που παρουσιάζουν οι αλγόριθμοι και αποπειράθηκε μια σύγκρισή τους με ήδη υπάρχοντες αλγόριθμους, με πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Η εργασία αυτή ελπίζουμε ότι θα δώσει μια νέα ώθηση στην έρευνα αλγορίθμων καταλλήλων για πολυωνυμικούς πίνακες πολλών μεταβλητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση

4.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα του υπολογισμού μιας ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης ενός ρητού διανυσματικού χώρου [For75], αποτελεί βασικό μέρος για πολλά προβλήματα ανάλυσης, σύνθεσης και σχεδίασης αυτομάτου ελέγχου (βλέπε [Wol74], [CD91], [Kuc79], [Var91]). Δεδομένης μιας συνάρτησης μεταφοράς $P(s)$ χρειαζόμαστε συνήθως να υπολογίσουμε μια αριστερή ή δεξιά πολυωνυμική κλασματική μορφή της $P(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s)$. Επίσης σε πολλές εφαρμογές, εκτός από την ανάγκη του να είναι πρώτη η προηγούμενη παραγοντοποίηση, χρειάζονται να βρεθούν παραγοντοποιήσεις όπου είτε οι πίνακες στον παρονομαστή $D_L(s)$, $D_R(s)$, είτε οι σύνθετοι πίνακες $E(s) := [D_L(s), N_L(s)]$, $F(s) := [N_R(s)^\top, -D_R(s)^\top]^\top$ να έχουν αντίστοιχα ελάχιστο βαθμό γραμμών ή στηλών, να είναι δηλαδή κανονικοί κατά γραμμές ή στήλες αντίστοιχα. Κλασικά παραδείγματα αποτελούν το πρόβλημα της επανατοποθέτησης των ιδιοτιμών του παρονομαστή (ολοκληρωμένες θεωρήσεις του προβλήματος υπάρχουν στα βιβλία [CD91], [Kuc79]) και της εύρεσης μιας ελάχιστης πραγμάτωσης ([Wol74], [Var91], [VK95]) ενός συστήματος με πολλές εισόδους και εξόδους όπου χρειάζεται ο υπολογισμός μιας ελάχιστης και πρώτης παραγοντοποίησης του συστήματος. Ακόμα και το πρόβλημα της αναγωγής σε κανονικό πολυωνυμικό πίνακα κατά γραμμές / στήλες (row / column reduction) ενός πολυωνυμικού πίνακα μπορεί να λυθεί με τεχνικές ελαχί-

στων πολυωνυμικών βάσεων, όπως περιγράφεται στις [BvdHP88] και [NP93].

Η κλασσική μέθοδος των Wolovich [Wol74] και Kailath [Kai80]) για την εύρεση μιας ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης ενός ρητού διανυσματικού χώρου, αρχίζει από μια όχι κατ' ανάγκη ελάχιστη πολυωνυμική βάση και στην συνέχεια χρησιμοποιώντας γνωστές τεχνικές πολυωνυμικών πινάκων όπως η εξαγωγή μέγιστων κοινών διαιρετών και αντιστρέψιμοι μετασχηματισμοί, καταλήγει στην επιθυμητή ελάχιστη πολυωνυμική βάση. Ωστόσο οι υλοποιήσεις τέτοιων τεχνικών πάσχουν από σοβαρά αριθμητικά προβλήματα και γι' αυτό δεν χρησιμοποιούνται σε πραγματικές εφαρμογές. Ένας εναλλακτικός αριθμητικά ευσταθής αλγόριθμος παρουσιάστηκε από τους Beelen και Veltkamp στην [BV87]. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες εφαρμόζοντας την γενικευμένη Schur ανάλυση στην block συνοδεύουσα μορφή του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα. Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της ελάχιστης βάσης εμφανίστηκε στην [M.P97] όπου χρησιμοποιήθηκαν Pade προσεγγίσεις των εμπλεκόμενων πολυωνυμικών πινάκων. Η προσέγγιση στο πρόβλημα που θα περιγραφθεί σε αυτό το κεφάλαιο, είναι συγκρίσιμη με αυτές των Karcaniias στην [Kar94] και των Karcaniias και Mitroulli στην [KM02], όπου μελετήθηκε ο υπολογισμός ελάχιστης βάσης πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων και με την [BK97] όπου χρησιμοποιήθηκε η δομή των Sylvester απαλειφουσών. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου δημοσιεύτηκαν από τους Antoniou και Vologianidis στην [AVV04].

4.2 Υπολογισμός ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης

Έχοντας αναφέρει τους βασικούς ορισμούς στο κεφάλαιο 1.5 συνεχίζουμε στα βασικά αποτελέσματα που πρωτοπαρουσιάστηκαν στην [AVV04]. Έστω $F(s) \in \mathbb{R}[s]^{(p+m) \times m}$ με $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} F(s) = m$ και $E(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times (p+m)}$ με $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} E(s) = p$ πολυωνυμικοί πίνακες τέτοιοι ώστε

$$E(s)F(s) = 0. \quad (4.1)$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει την σχέση μεταξύ των συντελεστών μιας ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ και μιας βάσης

του αριστερού πυρήνα της γενικευμένης απαλείφουσας του Sylvester R_k ή του Wolovich M_{ek} αντίστοιχα.

Θεώρημα 54 Έστω $E(s)$ μια ελάχιστη πολυωνυμική δάση του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ όπως στην σχέση (1.7). Έστω $\mu_i = \deg_{r_i} E(s)$, $i \in \mathbf{p}$ οι αριστεροί ελάχιστοι δείκτες του $F(s)$ και με a_k ας συμβολίσουμε τον αριθμό των γραμμών του $E(s)$ για τις οποίες ισχύει $\mu_i = \deg_{r_i} E(s) = k$. Τότε

$$\ker^L R_k = \ker^L M_{ek} = \text{Im}^L L_k, \quad (4.2)$$

όπου το $L_k \in \mathbb{R}^{v_k \times k(p+m)}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\text{block diag}\{S_{1,k-\mu_i}(s)\}_{i:\mu_i < k} E_k(s) = L_k S_{p+m,k}(s), \quad (4.3)$$

$E_k(s) \in \mathbb{R}^{\sigma_k \times (p+m)}$ είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας που αποτελείται από όλες τις $\sigma_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ τον αριθμό γραμμών του $E(s)$ με βαθμούς στηλών που ικανοποιούν τις σχέσεις $\mu_i = \deg_{r_i} E(s) < k$ και $v_k = \sum_{i:\mu_i < k} (k - \mu_i) = \dim \ker^L M_{ek} = \dim \ker^L R_k$.

Απόδειξη. Ξέροντας ότι ο $E_k(s)$ αποτελείται από γραμμές του $E(s)$ που ικανοποιούν την σχέση $\mu_i = \deg_{r_i} E(s) < k$, από την (1.7) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$E_k(s)F(s) = 0 \quad (4.4)$$

για κάθε $s \in \mathbb{C}$. Πολλαπλασιάζοντας την (4.3) με τον $F(s)$ από δεξιά και χρησιμοποιώντας την (4.4) έχουμε

$$L_k X_k(s) = 0$$

όπου ο $X_k(s)$ έχει οριστεί στην (1.9). Χρησιμοποιώντας αντίστοιχα τις (1.10) και (1.12), παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$L_k R_k S_{m,q+k}(s) = 0 \text{ και } L_k M_{ek} \text{block diag}\{S_{1,k_i+k}(s)\}_{i \in \mathbf{m}} = 0$$

που ισχύει για κάθε $s \in \mathbb{C}$. Έτσι

$$L_k R_k = 0 \text{ και } L_k M_{ek} = 0,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\text{Im}^L L_k \subset \ker^L R_k$ και $\text{Im}^L L_k \subset \ker^L M_{ek}$. Επίσης εύκολα φαίνεται ότι ο L_k έχει πλήρη τάξη γραμμών μια και η ύπαρξη ενός σταθερού διανύσματος $\bar{w}^\top \in \mathbb{R}^{1 \times v_k}$ τέτοιου ώστε $\bar{w}^\top L_k = 0$ θα σήμαινε μέσω της (4.3) την ύπαρξη πολυωνυμικού διανύσματος $w(s)^\top \in \mathbb{R}[s]^{1 \times \sigma_k}$ για το οποίο θα ίσχυε $w(s)^\top E_k(s) = 0$, κάτι που οδηγεί σε αντίφαση με το γεγονός ότι ο $E_k(s)$ έχει ανεξάρτητες γραμμές. Άρα

$$\dim \text{Im}^L L_k = \sum_{i: \mu_i < k} (k - \mu_i) = \dim \ker^L M_{ek} = \dim \ker^L R_k$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Ο στόχος είναι να προταθεί ένας καινούριος τρόπος για τον υπολογισμό μιας ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης του αριστερού πυρήνα του $F(s)$. Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι αυτό μπορεί να γίνει με συγκεκριμένους αριθμητικά ευσταθείς υπολογισμούς σε διαδοχικές Sylvester ή Wolovich απαλείφουσες του $F(s)$. Η βασική ιδέα πάνω στην οποία στηρίζεται το νέο αυτό αποτέλεσμα, είναι ότι αν είναι ήδη γνωστό μέρος της ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης $E(s)$ του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ που αντιστοιχεί στις γραμμές με βαθμούς μικρότερες από k , τότε είναι εύκολο να προσδιοριστούν γραμμικά ανεξάρτητα πολυωνυμικά διανύσματα γραμμών με βαθμούς ακριβώς k που να ανήκουν στον αριστερό πυρήνα του $F(s)$.

Με δεδομένο ότι $E_k(s) \in \mathbb{R}[s]^{\sigma_k \times (p+m)}$ (βλέπε θεώρημα 54) είναι ένα μέρος της ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης $E(s)$ του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ που περιέχει μόνο τις γραμμές του $E(s)$ με $\mu_i = \deg_{r_i} E(s) < k$, ορίζουμε για $k = 1, 2, 3, \dots$ την ακολουθία των ρητών διανυσματικών χώρων

$$\mathcal{F}_k = \text{Im}_{\mathbb{R}(s)}^L E_k(s). \quad (4.5)$$

Εύκολα φαίνεται ότι

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{\mu+1} = \ker_{\mathbb{R}(s)}^L F(s) \quad (4.6)$$

όπου $\mu = \max_{i \in \mathbf{p}} \{\mu_i\}$, ενώ προφανώς ισχύει

$$\dim_{\mathbb{R}(s)} \mathcal{F}_k = \sigma_k. \quad (4.7)$$

Θεώρημα 55 Έστω $E_k(s)$ μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του \mathcal{F}_k . Ορίζω τον πίνακα \bar{L}_{k+1} διαστάσεων $\sum_{i:\mu_i < k} (k - \mu_i + 1) \times (p + m)(k + 1)$ μέσω της παρακάτω σχέσης

$$\text{block diag}\{S_{1,k-\mu_i+1}(s)\}_{i \in \sigma_k} E_k(s) = \bar{L}_{k+1} S_{p+m,k+1}(s). \quad (4.8)$$

Έστω $\bar{N}_{k+1} \in \mathbb{R}^{a_k \times (p+m)(k+1)}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $\tilde{L}_{k+1} := [\bar{L}_{k+1}^\top, \bar{N}_{k+1}^\top]^\top$ διαστάσεων $a_k + \sum_{i:\mu_i < k} (k - \mu_i + 1) \times (p + m)(k + 1)$ να ικανοποιεί την

$$\text{rank} \tilde{L}_{k+1} = \sum_{i:\mu_i < k+1} (k - \mu_i + 1) \text{ και } \tilde{L}_{k+1} M_{e(k+1)} = 0 \quad (4.9)$$

δηλαδή ο \tilde{L}_{k+1} να είναι μια βάση του $\ker^L M_{e(k+1)}$. Τότε οι γραμμές του πολυωνυμικού πίνακα

$$\tilde{E}_{k+1}(s) := \begin{bmatrix} E_k(s) \\ N_{k+1}(s) \end{bmatrix}$$

σηματίζουν μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του \mathcal{F}_{k+1} όπου

$$N_{k+1}(s) := \bar{N}_{k+1} S_{p+m,k+1}(s) \in \mathbb{R}[s]^{a_k \times (p+m)}.$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά την (4.8) με τον $F(s)$ και έχοντας υπόψιν μας την (1.12) και ότι $E_k(s)F(s) = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$, καταλήγουμε στην

$$\bar{L}_{k+1} M_{e(k+1)} = 0 \quad (4.10)$$

με τις γραμμές του \bar{L}_{k+1} να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ψάχνουμε να βρούμε γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα γραμμών τα οποία μαζί με τις γραμμές του \bar{L}_{k+1} να σχηματίζουν μια βάση του $\ker^L M_{e(k+1)}$. Σύμφωνα με το θεώρημα 25 ισχύει $\dim \ker^L M_{e(k+1)} = \sum_{i:\mu_i < k+1} (k - \mu_i + 1)$ το οποίο αν συγκριθεί με τον αριθμό των γραμμών του \bar{L}_{k+1} δείχνει ότι χρειάζονται ακόμα a_k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα για να σχηματισθεί μια βάση του $\ker^L M_{e(k+1)}$. Ας υποθέσουμε ότι βρίσκουμε έναν $a_k \times (p + m)(k + 1)$ πλήρης τάξης γραμμών πίνακα \bar{N}_{k+1} τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\bar{N}_{k+1} M_{e(k+1)} = 0 \quad (4.11)$$

και με γραμμές γραμμικά ανεξάρτητες με αυτές του \bar{L}_{k+1} , δηλαδή

$$\text{rank} \tilde{L}_{k+1} = \sum_{i: \mu_i < k+1} (k - \mu_i + 1). \quad (4.12)$$

Προφανώς οι γραμμές του πίνακα $\begin{bmatrix} \bar{L}_{k+1} \\ \bar{N}_{k+1} \end{bmatrix}$ θα αποτελούν μια βάση του αριστερού πυρήνα του $M_{e(k+1)}$. Εύκολα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι οι γραμμές του πολυωνυμικού πίνακα $N_{k+1}(s) = \bar{N}_{k+1} S_{p+m, k+1}(s)$ θα ικανοποιούν την

$$N_{k+1}(s)F(s) = 0.$$

Επίσης οι γραμμές του $N_{k+1}(s)$ θα έχουν βαθμούς ακριβώς k , μια και αν υπήρχε μια γραμμή του $N_{k+1}(s)$ με $\deg_{r_i} N_{k+1}(s) < k$, η αντίστοιχη γραμμή του \bar{N}_{k+1} θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του \bar{L}_{k+1} , κάτι που αντιβαίνει με την (4.12). Υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης γραμμών P τέτοιος ώστε

$$P\bar{L}_{k+1} = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ X_k & E_k^{hr} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

όπου $L_k \in \mathbb{R}^{v_k \times k(p+m)}$ είναι μια βάση του $\ker^L M_{ek}$ όπως έχει οριστεί στην (4.3), X_k είναι ένα σταθερός πίνακας και E_k^{hr} είναι ο πίνακας των συντελεστών με το μέγιστο βαθμό κατά γραμμή του $E_k(s)$. Αντίστοιχα χωρίζουμε τον \bar{N}_{k+1} ως εξής

$$\bar{N}_{k+1} = [Y_k, N_{k+1}^{hr}],$$

όπου $Y_k \in \mathbb{R}^{a_k \times (p+m)k}$ και $N_{k+1}^{hr} \in \mathbb{R}^{a_k \times (p+m)}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών με το μέγιστο βαθμό κατά γραμμή του $N_{k+1}(s)$. Θα αποδείξουμε ότι ο $\tilde{E}_{k+1}(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές ή ισοδύναμα ότι ο \tilde{E}_{k+1}^{hr} έχει πλήρη τάξη γραμμών. Προφανώς ισχύει

$$\tilde{E}_{k+1}^{hr} = \begin{bmatrix} E_k^{hr} \\ N_{k+1}^{hr} \end{bmatrix}.$$

Υποθέτουμε ότι ο $\tilde{E}_{k+1}(s)$ δεν είναι κανονικός κατά γραμμές. Τότε θα υπάρχει ένα διάνυσμα γραμμών $[a^\top, b^\top]$ τέτοιο ώστε

$$[a^\top, b^\top] \begin{bmatrix} E_k^{hr} \\ N_{k+1}^{hr} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.14)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.10), (4.11) και (4.13) παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} L_k & 0 \\ X_k & E_k^{hr} \\ Y_k & N_{k+1}^{hr} \end{bmatrix} M_{e(k+1)} = 0$$

και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $[0, a^\top, b^\top]$, όπου a^\top, b^\top έχουν επιλεγθεί όπως στην (4.14), παίρνουμε

$$[a^\top, b^\top] \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} M_{ek} = 0$$

Τώρα γνωρίζοντας ότι ο L_k είναι μια βάση του αριστερού πυρήνα του M_{ek} , θα υπάρχει ένα διάνυσμα γραμμή c^\top τέτοιο ώστε

$$[a^\top, b^\top] \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = c^\top L_k.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$[-c^\top, a^\top, b^\top] \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{a_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{L}_{k+1} \\ \bar{N}_{k+1} \end{bmatrix} = 0$$

κάτι που εναντιώνεται στην (4.12). Άρα ο $\tilde{E}_{k+1}(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές και ως τέτοιος έχει πλήρη τάξη γραμμών στον $\mathbb{R}(s)$. Έτσι οι γραμμές του $\tilde{E}_{k+1}(s)$ σχηματίζουν μια βάση του ρητού διανυσματικού χώρου \mathcal{F}_{k+1} . Επίσης ο $\tilde{E}_{k+1}(s)$, σαν κανονικός κατά γραμμές πίνακας, δεν έχει μηδενικά στο $s = \infty$ [Var91] (λήμμα 3.100, σελ.144). Απομένει να δείξουμε ότι ο $\tilde{E}_{k+1}(s)$ δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά. Θεωρούμε τον ρητό διανυσματικό χώρο \mathcal{F}_{k+1} και την ελάχιστη πολυωνυμική βάση του που σχηματίζεται από τις γραμμές του $E_{k+1}(s)$. Τα $\mu_i = \deg_{r_i} E_{k+1}(s)$ είναι οι ελάχιστοι δείκτες του \mathcal{F}_{k+1} και με $ord\mathcal{F}_{k+1}$ συμβολίζουμε την (Forney invariant) ελάχιστη τάξη του \mathcal{F}_{k+1} , που στην περίπτωση μας είναι

$$ord\mathcal{F}_{k+1} = \sum_{i:\mu_i < k+1} \mu_i.$$

Οι γραμμές του $\tilde{E}_{k+1}(s)$ παράγουν επίσης τον ρητό διανυσματικό χώρο \mathcal{F}_{k+1} . Είναι γνωστό ([Var91], σελ. 137) ότι αν με $\mathcal{Z}\{\tilde{E}_{k+1}(s)\}$ συμβολίσουμε τον συνολικό αριθμό των πεπερασμένων και άπειρων μηδενικών, με $\delta_M\{\tilde{E}_{k+1}(s)\}$

τον McMillan βαθμό του $\tilde{E}_{k+1}(s)$ και με $ord\mathcal{F}_{k+1}$ την (Forney invariant [For75]) ελάχιστη τάξη του ρητού διανυσματικού χώρου που παράγεται από τις γραμμές του $\tilde{E}_{k+1}(s)$ ισχύει

$$\delta_M \left\{ \tilde{E}_{k+1}(s) \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \tilde{E}_{k+1}(s) \right\} + ord\mathcal{F}_{k+1}.$$

Όμως ξέρουμε ότι ο $\tilde{E}_{k+1}(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές και άρα ο McMillan βαθμός του είναι ίσος με το άθροισμα των αριστερών ελάχιστων δεικτών του, που από κατασκευής συμπίπτουν με $\sum_{i:\mu_i < k+1} \mu_i = ord\mathcal{F}_{k+1}$. Άρα $\mathcal{Z} \left\{ \tilde{E}_{k+1}(s) \right\} = 0$ που μας εξασφαλίζει ότι ο $\tilde{E}_{k+1}(s)$ δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά. Άρα ο $\tilde{E}_{k+1}(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές πολυωνυμικός πίνακας και άρα μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του \mathcal{F}_{k+1} . ■

Το προηγούμενο θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε διαδοχικά μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του $\ker_{\mathbb{R}(s)}^L F(s)$. Αρχίζοντας με $k = 0$ μπορεί να υπολογιστεί μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του \mathcal{F}_1 , δηλαδή το μέρος της ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης του $\ker_{\mathbb{R}(s)}^L F(s)$ με αριστερούς δείκτες $\mu_i = 0$. Χρησιμοποιώντας αυτό το μέρος της πολυωνυμικής βάσης και εφαρμόζοντας πάλι την διαδικασία του θεωρήματος 55 για $k = 1$, βρίσκουμε μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του \mathcal{F}_2 . Η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί μέχρι να βρεθεί μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση με p γραμμές.

Για να πετύχουμε αριθμητικά ευσταθή αποτελέσματα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ανάλυση με τις ιδιάζουσες τιμές (singular value decomposition ή SVD) που δίνει ορθοκανονικές βάσεις των πυρήνων των σταθερών πινάκων που εμπλέκονται. Επίσης οι γραμμές του \bar{N}_{k+1} μπορούν να διαλεχτούν έτσι ώστε όχι μόνο να είναι γραμμικά ανεξάρτητες με αυτές του \bar{L}_{k+1} , αλλά και ορθογώνιες με αυτές. Αυτό είναι δυνατόν να γίνει υπολογίζοντας μια ορθοκανονική βάση του αριστερού πυρήνα του $[M_{e(k+1)}, \bar{L}_{k+1}^\top]$. Οι συντελεστές μιας ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης που έχει βρεθεί με αυτό τον τρόπο θα αποτελούν ένα σύνολο ορθοκανονικών διανυσμάτων, δηλαδή, θα ισχύει $E_{k-1} E_{k-1}^\top = I_p$.

Πιο κάτω περιγράφεται η διαδικασία υπολογισμού ελάχιστης βάσης.

Αλγόριθμος 56 Υπολογισμός ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης

1. Υπολογίζω μια ορθοκανονική βάση \bar{N}_1 του $\ker^L M_{e1}$ και θέτω $E_1 = \bar{N}_1$.

2. Θέτω $k = 2$.
3. Χρησιμοποιώντας την (4.8), υπολογίζω το \bar{L}_k για $E_{k-1}(s) = E_{k-1}S_{p+m,k}$.
4. Υπολογίζω μια ορθοκανονική βάση \bar{N}_k του $\ker^L[M_{ek}, \bar{L}_k^\top]$ και θέτω

$$E_k = \begin{bmatrix} E_{k-1} & | & 0 \\ \bar{N}_k & & \end{bmatrix}.$$
5. Θέτω $k = k + 1$.
6. Αν $\{\#\text{γραμμών του } E_{k-1}\} < p$ πηγαίνω στο βήμα 3.
7. Η ελάχιστη πολυωνυμική βάση δίνεται από τον πίνακα $E_{k-1}S_{p+m,k-1}(s)$.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί ακόμα κι αν ο πίνακας $F(s)$ δεν έχει πλήρη τάξη γραμμών στον $\mathbb{R}(s)$. Υποθέτοντας ότι $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} F(s) = r < m$, μπορούμε εύκολα να τροποποιήσουμε το βήμα 6 έτσι ώστε η αναδρομή να σταματάει στην περίπτωση που $\{\#\text{γραμμών του } E_{k-1}\} = p + m - r$, μια και προφανώς $p + m - r$ είναι η διάσταση του αριστερού πυρήνα του $F(s)$. Στην περίπτωση που το r δεν είναι εκ των προτέρων γνωστό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον προτεινόμενο αλγόριθμο συνεχίζοντας μέχρι το k να φτάσει την τιμή mq , που είναι γνωστό ότι είναι το μέγιστο όριο για τον μεγαλύτερο αριστερό ελάχιστο δείκτη μ . Βέβαια σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος.

Ο αλγόριθμος μπορεί να τροποποιηθεί εύκολα έτσι ώστε να υπολογίζει δεξιές ελάχιστες πολυωνυμικές βάσεις, απλά παίρνοντας τον ανάστροφο του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι στην παραπάνω ανάλυση χρησιμοποιήθηκε η γενικευμένη απαλείφουσα του Wolovich γιατί έχει γενικά λιγότερες στήλες από την αντίστοιχη Sylvester απαλείφουσα (βλέπε (1.14)). Παρόλα αυτά εφόσον οι αριστεροί πυρήνες και των δύο ταυτίζονται, ο αλγόριθμος θα μπορούσε να υλοποιηθεί με οποιαδήποτε από τις δύο απαλείφουσες.

4.3 Αριθμητικές ιδιότητες του αλγορίθμου

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος υπολογίζει διαδοχικά ορθοκανονικές βάσεις των αριστερών πυρήνων των πινάκων $[M_{ek}, \bar{L}_k^T]$ για κάθε $k = 1, 2, 3, \dots$. Ο πιο αξιόπιστος τρόπος για την εύρεση ορθοκανονικών βάσεων του πυρήνα ενός σταθερού πίνακα είναι αναμφίβολα η ανάλυση με τις ιδιάζουσες τιμές (SVD) (βλέπε [GVL96]). Με αυτό τον τρόπο η πολυπλοκότητα σε κάθε βήμα του αλγορίθμου φράσσεται από $O(n^3 k^3)$ (όπου για ευκολία χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό $n := p + m$ για $F(s) \in \mathbb{R}[s]^{(p+m) \times m}$). Η εφαρμογή απλών υλοποιήσεων της SVD (όπως την Golub-Reinsch SVD ή την R-SVD) σε κάθε βήμα, θα είχε σαν επακόλουθο ένα αρκετά μεγάλο υπολογιστικό κόστος, μια και η SVD που υπολογίστηκε στο βήμα k δεν λαμβάνεται υπ' όψιν στην επόμενη επανάληψη. Παρόλα αυτά, ένας ταχύτατος και backward stable αλγόριθμος για την ενημέρωση της SVD μορφής όταν γραμμές ή στήλες προστίθενται στον αρχικό πίνακα εμφανίστηκε στην βιβλιογραφία τελευταία στην [GE94]. Το κόστος κάθε ενημέρωσης εξαρτάται από τις διαστάσεις του πίνακα στο τετράγωνο. Χρησιμοποιώντας αυτή την υλοποίηση SVD, το κόστος του αλγορίθμου μας περιορίζεται σε $O(n^3 k^3)$ μέχρι το k βήμα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι οι επαναλήψεις συνεχίζονται μέχρι $k = \mu + 1$ και μ είναι ο μέγιστος από τους ελάχιστους αριστερούς δείκτες του $F(s)$, συμπεραίνουμε ότι το συνολικό κόστος του προτεινόμενου αλγορίθμου φράσσεται από το $O(\mu^3 n^3)$.

Συγκρίνοντας την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου του [BV87] που είναι της τάξης του $O(q^3 n^3)$, με q το μέγιστο βαθμό του s που εμφανίζεται στον $F(s)$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο αλγόριθμός μας είναι πιο αποτελεσματικός στην περίπτωση που $\mu < q$. Βέβαια το μέγιστο του μ είναι $m q$ και έτσι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μπορεί να φτάσει την τάξη $O(m^3 q^3 n^3)$. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο σε ακραίες περιπτώσεις όπου ο $F(s)$ έχει μόνο ένα αριστερό ελάχιστο δείκτη τάξης μεγαλύτερης του μηδενός και ταυτόχρονα καθόλου πεπερασμένους ή άπειρους διαιρέτες (βλέπε το παράδειγμα 59). Στην γενική περίπτωση που ο $F(s)$ έχει πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες (μηδενικά) και/ή δεν είναι κανονικός κατά στήλες ή ακόμα καλύτερα αν $p \approx m$, αναμένετε ότι $\mu \leq q$. Η αποδοτικότητα του αλγορίθμου μπορεί να βελτιωθεί χρησιμοποιώντας τεχνικές "αραιών" πινάκων στις περιπτώσεις που οι

διαστάσεις των απαλειφουσών μεγαλώσουν αρκετά.

Ο αλγόριθμος είναι αριθμητικά ευσταθής μια και κάθε βήμα του εξαρτάται από την ευστάθεια των SVD υπολογισμών. Η διαδικασία του υπολογισμού μιας ορθοκανονικής βάσης του αριστερού πυρήνα του $Q_k := [M_{ek}, \bar{L}_k^\top]$, περιλαμβάνει τον υπολογισμό της ανάλυσης με τις ιδιάζουσες τιμές $Q_k = U_k^\top \Sigma_k V_k$, όπου οι πίνακες U_k, V_k είναι ορθογώνιοι και $\Sigma_k = \text{diag}\{\sigma_i(Q_k), 0\}$, με $\sigma_i(Q_k)$ να συμβολίζει τις ιδιάζουσες τιμές (singular values) του Q_k . Στη συνέχεια η τάξη του πίνακα Q_k θα προσδιορίζεται διαλέγοντας r_k τέτοιο ώστε $\sigma_{r_k}(Q_k) \geq \delta_k > \sigma_{r_k+1}(Q_k)$, όπου $\delta_k = \|Q_k\|_\infty u$ και $u > 0$ ένας μικρός αριθμός τέτοιος ώστε το δ_k να είναι συνεπές με την ακρίβεια του υπολογιστή ([GVL96]). Η βάση του αριστερού πυρήνα του Q_k δίνεται τότε από τις γραμμές του U_k που αντιστοιχούν στις ιδιάζουσες τιμές που είναι μικρότερες από το δ_k . Εύκολα φαίνεται ότι αν \bar{N}_k (χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό στο τέταρτο βήμα του αλγόριθμου) είναι μια τέτοια βάση, τότε $\|\bar{N}_k M_{ek}\|_2 < \delta_k$. Το γινόμενο $\bar{N}_k M_{ek}$ δίνει τους συντελεστές του γινομένου των νέων γραμμών της ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης με το $F(s)$ και άρα είναι σημαντικό να κρατήσουμε το μέτρο $\|\bar{N}_k M_{ek}\|_2$ μικρό σε σχέση με τον M_{ek} . Επίσης φαίνεται ότι $\|M_{ek}\|_\infty = \|M_{e1}\|_\infty$ και επιπλέον εξαιτίας της ειδικής δομής του \bar{L}_k ισχύει $\|\bar{L}_k^\top\|_\infty \leq 2p$. Για να αποφεύγονται προβληματικές περιπτώσεις όπως παραδείγματος χάρη αν $\|M_{ek}\|_\infty \ll \|Q_k\|_\infty$ κάτι που αν ίσχυε θα μπορούσε να οδηγήσει σε λανθασμένο υπολογισμό του r_k , είναι αναγκαίο να πειραχθεί ο M_{ek} με σκοπό να "ισορροπήσει" τα στοιχεία του Q_k . Πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι μια καλή πρακτική είναι να κανονικοποιείται ο πίνακας $F(s)$ χρησιμοποιώντας το $\|M_{e1}\|_\infty$, δηλαδή θέτοντας $\bar{F}(s) = F(s) / \|M_{e1}\|_\infty$. Σε αυτή την περίπτωση ένας γρήγορος υπολογισμός δίνει

$$\|\bar{N}_k M_{ek}\|_2 < u \|M_{e1}\|_\infty (2p + 1)$$

δηλαδή οι συντελεστές του γινομένου $E(s)F(s)$ θα είναι τάξης μεγέθους περίπου u φορές της τάξης μεγέθους των συντελεστών του $F(s)$, που είναι κοντά στο μηδέν συγκρινόμενο με αυτή του $F(s)$.

4.4 Παραδείγματα

Στα παρακάτω παραδείγματα οι υπολογισμοί έγιναν σε Η/Υ τύπου PC, με σχετική ακρίβεια $EPS = 2^{-52} \simeq 2.22045 * 10^{-16}$.

Παράδειγμα 57 Έστω το παράδειγμα 5.2 στην [BV87]. Έστω μία συνάρτηση μεταφοράς $P(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$, όπου

$$D_L(s) = (s+2)^2(s+3) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N_L(s) = \begin{bmatrix} 3s+8 & 2s^2+6s+2 \\ s^2+6s+2 & 2s^2+7s+8 \end{bmatrix}.$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα $F(s) = [D_L(s), -N_L(s)]^T$ και υπολογίζουμε μια ελάχιστη βάση του αριστερού πυρήνα του $F(s)$. Παρατηρούμε ότι $\|M_{e1}\|_\infty = 36$ και γι' αυτό κανονικοποιούμε τον πίνακα $F(s)$ θέτοντας $\bar{F}(s) = F(s)/\|M_{e1}\|_\infty$. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν παρουσιάζονται στρογγυλοποιημένα σε τρία ή τέσσερα δεκαδικά ψηφία λόγω έλλειψης χώρου. Όλοι οι υπολογισμοί έγιναν στην σχετική ακρίβεια που αναφέρθηκε πιο πάνω. Ο κανονικοποιημένος $\bar{F}(s)$ είναι

$$\bar{F}(s) = \begin{bmatrix} 0.028s^3 + 0.194s^2 + 0.444s + 0.333 & 0. & 0.028s^3 + 0.194s^2 + 0.444s + 0.333 \\ 0. & -0.0833s - 0.222 & -0.028s^2 - 0.167s - 0.056 \\ -0.056s^2 - 0.167s - 0.056 & -0.083s^2 - 0.194s - 0.222 & 0. \end{bmatrix}$$

Για $k = 1$ υπολογίζουμε την

$$M_{e1} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 & 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0. & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 \\ -0.222 & -0.083 & 0 & 0 & -0.056 & -0.167 & -0.028 & 0 \\ -0.056 & -0.167 & -0.056 & 0 & -0.222 & -0.194 & -0.083 & 0 \end{bmatrix}$$

και τον αριστερό της πυρήνα, ο οποίος είναι κενός. Άρα $E_1 = \emptyset$. Για $k = 2$

υπολογίζουμε

$$M_{e_2} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 & 0 \\ 0. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.222 & -0.083 & 0 & 0 & 0 \\ -0.056 & -0.167 & -0.056 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 \\ 0 & 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.222 & -0.083 & 0 & 0 \\ 0 & -0.056 & -0.167 & -0.056 & 0 \\ & & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 & 0 \\ & & -0.056 & -0.167 & -0.0278 & 0 & 0 \\ & & -0.222 & -0.194 & -0.083 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 \\ & & 0 & -0.056 & -0.167 & -0.028 & 0 \\ & & 0 & -0.222 & -0.194 & -0.083 & 0 \end{bmatrix}.$$

Μια και $E_1 = \emptyset$, $\bar{L}_2 = \emptyset$ πρέπει να υπολογίσουμε τον αριστερό πυρήνα του M_{e_2} ο οποίος παράγεται από τον

$$\bar{N}_2 = \begin{bmatrix} -0.343 & -0.514 & -0.343 & -0.686 & 4.227 \cdot 10^{-16} \\ & & & -2.516 \cdot 10^{-16} & -7.473 \cdot 10^{-16} & -0.171 \end{bmatrix}.$$

Θέτουμε $E_2 = \bar{N}_2$ και συνεχίζουμε για $k = 3$ και υπολογίζοντας τους πίνακες

Έπειτα υπολογίζουμε τον αριστερό πυρήνα του $[M_{e_3}, \bar{L}_3^\top]$ που είναι

$$\bar{N}_3 = \begin{bmatrix} 0.312 & -0.092 & 0.535 & -0.272 & -0.076 & 0.110 \\ 0.595 & -0.332 & -6.461 \cdot 10^{-17} & 1.717 \cdot 10^{-16} & 0.224 & -0.038 \end{bmatrix}$$

και θέτουμε

$$E_3 = \begin{bmatrix} -0.343 & -0.514 & -0.343 & -0.686 & 4.227 \cdot 10^{-16} & -2.516 \cdot 10^{-16} \\ 0.312 & -0.092 & 0.535 & -0.272 & -0.076 & 0.110 \\ -7.473 \cdot 10^{-16} & -0.171 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.595 & -0.332 & -6.461 \cdot 10^{-17} & 1.717 \cdot 10^{-16} & 0.224 & -0.038 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε $p = 2$ γραμμές στον E_3 και άρα σταματάμε την αναδρομή. Η ανεστραμμένη ελάχιστη πολωνυμική βάση είναι $E(s) = E_3 S_{4,3}(s)$, με $E(s) = \begin{bmatrix} N_R(s) & D_R(s) \end{bmatrix}$. Άρα

$$E^\top(s) = \begin{bmatrix} 8.902 \times 10^{-17} s - 0.3429 & -2.468 \times 10^{-16} s^2 - 0.07616s + 0.3117 \\ 2.324 \times 10^{-16} s - 0.5144 & -3.185 \times 10^{-16} s^2 + 0.1095s - 0.0918 \\ -7.154 \times 10^{-18} s - 0.3429 & 0.2237s^2 + 0.595s + 0.535487 \\ -0.1714s - 0.6859 & -0.03808s^2 - 0.3321s - 0.271669 \end{bmatrix}$$

και ο αριθμητής και παρονομαστής της δεξιάς παραγοντοποίησης είναι αντίστοιχα

$$N_R(s) = \begin{bmatrix} 8.902 \times 10^{-17} s - 0.3429 & 2.324 \times 10^{-16} s - 0.5144 \\ -0.07616s - 2.468 \times 10^{-16} s^2 + 0.3117 & 0.1095s - 3.185 \times 10^{-16} s^2 - 0.0918 \end{bmatrix}$$

και

$$D_R(s) = \begin{bmatrix} -7.154 \times 10^{-18} s - 0.3429 & -0.1714s - 0.6859 \\ 0.595s + 0.2237s^2 + 0.53549 & -0.3321s - 0.03808s^2 - 0.27167 \end{bmatrix}.$$

Έτσι $P(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s)$. Σημειώστε ότι $\mu = 2$, που είναι μικρότερο από τον βαθμό του $F(s)$, $q = 3$.

Παράδειγμα 58 Έστω τώρα το παράδειγμα 5.1 στην [BV87] με συνάρτηση μεταφοράς $P(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s)$, όπου

$$N_R(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}, D_R(s) = \begin{bmatrix} 1-s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s \end{bmatrix}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα $F(s) = [N_R^\top(s), -D_R^\top(s)]^\top$. Η ελάχιστη δάση του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ δίνεται από τον αλγόριθμό μας από τον πίνακα

$$E(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a(s-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & -as \\ a(s-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & -as^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -bs^2 + cs - b & 0 & 0 & -bs^2 & b(s^2 - s) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $a \simeq 0.57735$, $b \simeq 0.333333$ και $c \simeq 0.666667$. Η αριστερή πρώτη κλασματική μορφή του $P(s) = N_L(s)D_L^{-1}(s)$ μπορεί να βρεθεί με κατάλληλη κατάτμηση του πίνακα $E(s)$ δηλαδή

$$D_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a(s-1) \\ a(s-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -bs^2 + cs - b & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$N_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -as \\ -as^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -bs^2 & b(s^2 - s) & 0 \end{bmatrix}$$

Προσέξτε ότι $\mu = 2$ που είναι ίσο με $q = 2$.

Παράδειγμα 59 Έστω ο πίνακας

$$F(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ s^q & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & s^q & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & s^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(m+1) \times m}$$

Η ελάχιστη πολυωνυμική βάση για τον αριστερό πυρήνα του $F(s)$ όπως υπολογίζεται από τον αλγόριθμο είναι

$$E(s) = a[s^{qm}, s^{q(m-1)}, \dots, s^q, 1] \in \mathbb{R}[s]^{1 \times (m+1)}$$

όπου $a = \frac{1}{\sqrt{m+1}}$. Προφανώς $\mu = qm$, που είναι η χειρότερη περίπτωση ως προς την απόδοση του αλγορίθμου. Είναι εμφανής η απουσία πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών στον $F(s)$ όπως και ότι $\dim \ker_{\mathbb{R}(s)}^L F(s) = 1$, κάτι που σημαίνει ότι το qm "καταναλώνεται" μόνο σε ένα αριστερό ελάχιστο διαιρέτη.

4.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο προτάθηκε ένας αλγόριθμος βασισμένος στις απαλείφουσες για τον υπολογισμό ελάχιστων πολυωνυμικών βάσεων ενός πολυωνυμικού πίνακα. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την δομή του αριστερού πυρήνα διαδοχικών γενικευμένων απαλείφουσών του Wolovich ή του Sylvester ενός πολυωνυμικού πίνακα για την εύρεση των πινάκων συντελεστών της ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης του αριστερού πυρήνα του πολυωνυμικού πίνακα. Ο υπολογισμός γίνεται μόνο με ορθογώνιες αναλύσεις και οι συντελεστές της ελάχιστης βάσης έχουν το πλεονέκτημα να είναι ορθοκανονικοί. Ο αλγόριθμος είναι αριθμητικά ευσταθής και βασίζεται σε γνωστές τεχνικές όπως η SVD. Η διαδικασία που περιγράφηκε χρειάζεται περίπου $O(n^3 \mu^3)$ πράξεις κινητής υποδιαστολής μέγεθος συγκρίσιμο με άλλες μεθόδους ([BV87], [M.P97]) μια και στις περισσότερες περιπτώσεις η τάξη του μεγαλύτερου ελάχιστου αριστερού δείκτη μ είναι κοντά στο βαθμό q του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα.

Περαιτέρω έρευνα μπορεί να γίνει σε πιο συγκεκριμένα προβλήματα όπως στον υπολογισμό row / column reduced πολυωνυμικών πινάκων χρησιμοποιώντας μεθόδους παρόμοιες με την [BvdHP88] (ή τον βελτιωμένο αλγόριθμο της [NP93]), ή στον υπολογισμό της τάξης, των ελάχιστων δεικτών ή και του μέγιστου κοινού διαιρέτη πολυωνυμικών πινάκων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Στοιχειώδης ισοδυναμία

5.1 Εισαγωγή

Η μελέτη των ισοδυναμιών μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων, απασχόλησε πολλούς συγγραφείς. Ο πρωταρχικός στόχος των μελετών αυτών ήταν η εύρεση ισοδυναμιών που να διατηρούν την δομή των πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών. Η αυστηρή ισοδυναμία (ορισμός 17) παρουσιάστηκε αρχικά από τον Gantmacher [Gan59], όπου αποδείχθηκε ότι έχει την ιδιότητα να διατηρεί τους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες πρωτοβάθμιων πινάκων. Η αυστηρή ισοδυναμία γενικεύτηκε στην πολυωνυμική περίπτωση από τον Rosenbrock [Ros70]. Παρόλα αυτά και οι δύο αυτές ισοδυναμίες συνδέουν πίνακες ίδιων διαστάσεων και βαθμών. Οι Pugh και Shelton στην [PS78] παρουσίασαν την *γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία (extended unimodular equivalence)* η οποία είναι μια ισοδυναμία μεταξύ πινάκων με πιθανώς διαφορετικές διαστάσεις, διατηρώντας όμως μόνο την πεπερασμένη δομή των εμπλεκόμενων πινάκων.

Οι άπειροι στοιχειώδεις διαιρέτες ορίστηκαν αρχικά από τον Gantmacher στην [Gan59] όπου αποδείχθηκε ότι παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από τον μετασχηματισμό της αυστηρής ισοδυναμίας. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι στους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες οι έννοιες της διατήρησης της δομής των απείρων μηδενικών και αυτής των στοιχειωδών διαιρετών στο άπειρο συμπίπτουν μια και οι τάξεις των στοιχειωδών διαιρετών

στο άπειρο συνδέονται άμεσα με αυτές των μηδενικών στο άπειρο (βλέπε θεώρημα 24). Η *τέλεια ισοδυναμία* (*complete equivalence*) η οποία προτάθηκε από τους Pugh, Hayton και Fretwell [PHF87] για πρωτοβάθμιους πίνακες διαφορετικών διαστάσεων, διατηρεί ταυτόχρονα την πεπερασμένη και άπειρη δομή των στοιχειωδών διαιρετών. Η [HPF88] γενίκευσε τον ορισμό των άπειρων στοιχειωδών διαιρετών στην γενική πολυωνυμική περίπτωση και έδειξε ότι η δομή αυτή χαρακτηρίζει πλήρως την δομή πόλων και μηδενικών στο άπειρο ενός πολυωνυμικού πίνακα και όχι απλά τα μηδενικά στο άπειρο. Έτσι ενώ η πλήρης ισοδυναμία (*full equivalence*) που παρουσιάστηκε αργότερα [HWP90], διατηρεί την άπειρη μηδενική δομή του πίνακα, δεν αφήνει αναλλοίωτη την δομή των άπειρων στοιχειωδών διαιρετών. Η αυστηρή ισοδυναμία πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων γενικεύτηκε κατά ένα τρόπο στην περίπτωση των κανονικών πολυωνυμικών πινάκων στην [VA03] όπου δείχθηκε ότι διατηρεί την πεπερασμένη και άπειρη δομή στοιχειωδών διαιρετών. Όμως η αυστηρή ισοδυναμία κατά [VA03] χαρακτηρίζει τους ισοδύναμους κανονικούς πολυωνυμικούς πίνακες μέσω μιας πρωτοβάθμιας αναπαράστασής τους, χωρίς να προτείνει μια άμεση αλγεβρική σχέση μεταξύ των πολυωνυμικών πινάκων. Ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα δημοσιεύτηκε από τους Karampetakis και Vologianidis [KV02b], [KV03b] για γενικούς μη τετράγωνους πίνακες. Στις παραπάνω εργασίες, οι πολυωνυμικοί πίνακες μιας μεταβλητής μετατράπηκαν σε πίνακες με στοιχεία ομογενή πολυώνυμα δύο μεταβλητών και έπειτα χρησιμοποιήθηκαν γνωστές ισοδυναμίες μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων δύο μεταβλητών.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια ισοδυναμία μεταξύ κανονικών πολυωνυμικών πινάκων με πιθανώς διαφορετικές διαστάσεις και βαθμούς, που αφήνει αναλλοίωτη την άπειρη και πεπερασμένη δομή στοιχειωδών διαιρετών *γενικεύοντας πλήρως* την έννοια της αυστηρής ισοδυναμίας των πρωτοβάθμιων πινάκων. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού δημοσιεύτηκαν στις [KVV01] και [KVV04].

5.2 Μια νέα ισοδυναμία κανονικών πολυωνυμικών πινάκων

Εξετάζοντας το θεώρημα 15, μια αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s) \in \mathbb{R}[\sigma]^{r_1 \times r_1}$, $A_2(s) \in \mathbb{R}[\sigma]^{r_2 \times r_2}$ με βαθμούς q_1, q_2 αντίστοιχα να έχουν ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες, είναι σύμφωνα με το θεώρημα 15, να ισχύει $r_1 q_1 = r_2 q_2$. Έτσι ορίζουμε σαν $\mathbb{R}_c[s]$ το παρακάτω σύνολο πολυωνυμικών πινάκων

$$\mathbb{R}_c[s] := \{A(s) = A_q s^q + \dots + A_0 \in \mathbb{R}[s]^{r \times r} \text{ με } c = rq, r \geq 2\} \quad (5.1)$$

Για να γίνει κατανοητός ο παραπάνω ορισμός δίνεται το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 60

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_4[s]; \quad A_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_6[s]$$

$$A_3(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_4[s]$$

Πριν συνεχίσουμε με τα βασικά αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου, θα δώσουμε ένα παράδειγμα καταδεικνύοντας τις αδυναμία της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας να διατηρήσει τους άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Παράδειγμα 61 Έστω οι πολυωνυμικοί πίνακες

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_4[s]; \quad A_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_6[s]$$

και η σχέση γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας (ορισμός 16) που τους συνδέει

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}_{A_1(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}_{A_2(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s^2 - s^3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{N(s)}$$

όπου $r = 0$, $m = 2$, $l = 2$. Οι Smith μορφές των $A_1(s)$, $A_2(s)$ είναι $S_{A_2(s)}^C(s) = S_{A_1(s)}^C(s) = \text{diag}\{1, s+1\}$, άρα και οι δύο πίνακες έχουν τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Η Smith μορφή στο μηδέν των δυικών των $A_1(s)$, $A_2(s)$ είναι $S_{A_1(s)}^0(s) = \text{diag}\left[1 \quad s^3\right]$ και $S_{A_2(s)}^0(s) = \text{diag}\left[1 \quad s^5\right]$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι έχουν διαφορετικούς στοιχειώδεις διαιρέτες στο ∞ , τάξης 3 και 5 αντίστοιχα.

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας κάνει να υποψιαζόμαστε ότι για διατηρηθεί και η δομή στο άπειρο, χρειάζονται επιπλέον περιορισμοί στους block πίνακες $\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$.

Ορισμός 62 Οι πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ θα λέγονται **στοιχειωδώς ισοδύναμοι** (*divisor equivalent* ή *d.e.*) αν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $M(s)$, $N(s)$ καταλλήλων διαστάσεων, τέτοιοι ώστε να ισχύει η σχέση

$$\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.2)$$

και οι block πίνακες $\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$ να ικανοποιούν ταυτόχρονα τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- 1) Να έχουν πλήρη τάξη πάνω στον $\mathbb{R}(s)$ και όχι πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες
- 2) Να μην έχουν στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο.

Η δεύτερη συνθήκη είναι ισοδύναμη με το να έχει ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής πίνακας των αντίστοιχων block πινάκων πλήρη τάξη στο \mathbb{R} [Var91]. Οι δύο συνθήκες μαζί είναι ισοδύναμες με το να είναι ο $\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}$ αριστερή ελάχιστη βάση [Var91] του $\begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$ και ο $\begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$ μια δεξιά ελάχιστη βάση του $\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}$. Ο στόχος μας από δω και πέρα είναι να δείξουμε ότι η στοιχειώδης ισοδυναμία είναι όντως μια σχέση ισοδυναμίας και μάλιστα διατηρεί αναλλοίωτη την πεπερασμένη και άπειρη δομή των στοιχειωδών διαιρετών των πινάκων. Μας χρειάζονται τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 63 Έστω οι πίνακες $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$, $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m+r \times m+r}$ και $A_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{m+r \times m+r}$. Αν οι $A_1(s)$, $A_2(s)$ είναι d.e. και οι $A_2(s)$, $A_3(s)$ είναι αυστηρώς ισοδύναμοι (ορισμός 17), τότε οι $A_1(s)$, $A_3(s)$ είναι d.e.

Απόδειξη. Έστω ότι οι πίνακες $A_1(s)$, $A_2(s)$ συνδέονται με την επόμενη σχέση στοιχειώδους ισοδυναμίας:

$$M_1(s)A_1(s) = A_2(s)N_1(s) \quad (5.3)$$

ενώ οι $A_2(s)$, $A_3(s)$ με την παρακάτω σχέση αυστηρής ισοδυναμίας:

$$M_2A_2(s) = A_3(s)N_2 \quad (5.4)$$

όπου οι M_2 , N_2 είναι σταθεροί αντιστρέψιμοι πίνακες. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά την (5.3) με M_2 και χρησιμοποιώντας την σχέση (5.4) παίρνουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό πινάκων:

$$\begin{aligned} [M_2M_1(s)] A_1(s) &= A_3(s) [N_2N_1(s)] \iff \\ \begin{bmatrix} M_2M_1(s) & A_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N_2N_1(s) \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Θα δείξουμε ότι οι block πίνακες της (5.5) ικανοποιούν τις συνθήκες της στοιχειώδους ισοδυναμίας. Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N_2N_1(s) \end{bmatrix} I$$

και

$$M_2 \begin{bmatrix} M_1(s) & A_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2M_1(s) & A_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}$$

οι οποίες είναι προφανώς σχέσεις αυστηρής ισοδυναμίας και άρα οι block πίνακες

$$\begin{bmatrix} M_2M_1(s) & A_3(s) \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N_2N_1(s) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

έχουν κοινή δομή πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών με τους

$$\begin{bmatrix} M_1(s) & A_2(s) \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N_1(s) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

αντίστοιχα. Η (5.3) είναι μετασχηματισμός στοιχειώδους ισοδυναμίας και έτσι οι (5.7) και οι (5.6) δεν έχουν ούτε πεπερασμένους ούτε άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Άρα η (5.5) είναι μια σχέση στοιχειώδους ισοδυναμίας και οι $A_1(s)$ και $A_3(s)$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι. ■

Έστω ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(s)$. Τότε μπορούμε να φτιάξουμε ένα πρωτοβάθμιο πίνακα $sE - A$ όπως στην (5.8) ([GLR82], σελ 186) που να έχει τους ίδιους πεπερασμένους [GLR82] και άπειρους [Pra91], [VA01] στοιχειώδεις διαιρέτες με τον $A(s)$. Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύεται ότι ο προτεινόμενος πρωτοβάθμιος πίνακας $sE - A$ είναι στην πραγματικότητα d.e. με τον $A(s)$.

Λήμμα 64 Αν $c = rq, r \geq 2$ ο πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ όπως ορίστηκε στην (5.1) και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$sE - A := \begin{bmatrix} sI_r & -I_r & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & sI_r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sI_r & -I_r \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{q-2} & sA_q + A_{q-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_c[s] \quad (5.8)$$

είναι d.e.

Απόδειξη. Έστω $s_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\det[A(s_0)] \neq 0$, και $\Lambda_0 := \text{diag}[s_0, s_0, \dots, s_0] \in \mathbb{R}^{r \times r}$ τέτοιο ώστε τα $sI_r - \Lambda_0$ και $A(s)$ να είναι πρώτα μεταξύ τους. Ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0_{(q-1)r,r} \\ sI_r - \Lambda_0 \end{bmatrix}}_{M(s)} A(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} sI_r & -I_r & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & sI_r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sI_r & -I_r \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{q-2} & sA_q + A_{q-1} \end{bmatrix}}_{sE - A} \underbrace{\begin{bmatrix} I_r \\ sI_r \\ \vdots \\ s^{q-1}I_r \end{bmatrix}}_{N(s)} (sI_r - \Lambda_0). \quad (5.9)$$

Έστω ο block πίνακας

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} M(s) & sE - A & & & & & \\ \hline & 0 & sI_r & -I_r & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & sI_r & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & sI_r & -I_r \\ & (sI_r - \Lambda_0) & A_0 & A_1 & \cdots & A_{q-2} & sA_q + A_{q-1} \end{array} \right].$$

Παρατηρώ ότι δύο rq τάξης ελάχιστες ορίζουσες του $\left[\begin{array}{c|cccccc} M(s) & sE - A & & & & & \\ \hline & 0 & sI_r & -I_r & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & sI_r & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & sI_r & -I_r \\ & (sI_r - \Lambda_0) & A_0 & A_1 & \cdots & A_{q-2} & sA_q + A_{q-1} \end{array} \right]$

$$\det[sE - A] = \det[A(s)]$$

και

$$\det[L(s)] = \det[(sI_r - \Lambda_0)]$$

όπου

$$L(s) := \left[\begin{array}{cccccc} 0 & -I_r & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sI_r & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sI_r & -I_r & 0 \\ (sI_r - \Lambda_0) & A_1 & \cdots & A_{q-2} & sA_q + A_{q-1} & 0 \end{array} \right],$$

είναι πρώτες μεταξύ τους γιατί οι πίνακες $A(s)$ και $sI_r - \Lambda_0$ είναι πρώτοι.

Ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $\left[\begin{array}{c|cccccc} M(s) & sE - A & & & & & \\ \hline & 0 & sI_r & -I_r & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & sI_r & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & sI_r & -I_r \\ & (sI_r - \Lambda_0) & A_0 & A_1 & \cdots & A_{q-2} & sA_q + A_{q-1} \end{array} \right]$ έχει βαθμίδα

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & I_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_r & 0 \\ I_r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_q \end{array} \right] = rq$$

και άρα ο πίνακας $\left[\begin{array}{c|cccccc} M(s) & sE - A & & & & & \\ \hline & 0 & sI_r & -I_r & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & sI_r & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & sI_r & -I_r \\ & (sI_r - \Lambda_0) & A_0 & A_1 & \cdots & A_{q-2} & sA_q + A_{q-1} \end{array} \right]$ δεν έχει στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο. Ας θεωρήσουμε τώρα τον δεύτερο block πίνακα της σχέσης (5.9), δη-

λαδή τον

$$\begin{bmatrix} A(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) \\ (sI_r - \Lambda_0) \\ (sI_r - \Lambda_0) s \\ \vdots \\ (sI_r - \Lambda_0) s^{q-1} \end{bmatrix}$$

Δύο ελάχιστονες μέγιστης τάξης είναι οι

$$Q_1(s) = A(s) \text{ και } Q_2(s) = sI_r - \Lambda_0$$

με ορίζουσες

$$\det [Q_1(s)] = \det [A(s)] \text{ και } \det [Q_2(s)] = \det [sI_r - \Lambda_0]$$

Ο Λ_0 είχε διαλεχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε τα $A(s)$ και $sI_r - \Lambda_0$ να είναι πρώτα, άρα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\det [Q_1(s)]$ και $\det [Q_2(s)]$ είναι το 1. Άρα

ο πίνακας $\begin{bmatrix} A(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$ δεν έχει πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Ο με-

γιστοβάθμιος συντελεστής του $\begin{bmatrix} A(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$ είναι ο $\begin{bmatrix} A_q^\top & 0 & \dots & I_r \end{bmatrix}^\top$ που

έχει πλήρη τάξη στηλών και άρα ο $\begin{bmatrix} A(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$ δεν έχει άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Έτσι μέχρι στιγμής αποδείχθηκε ότι οι εμπλεκόμενοι στην σχέση

(5.9) πίνακες $\begin{bmatrix} M(s) & sE - A \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} A(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$, ικανοποιούν τις συνθήκες της d.e. και άρα οι πίνακες $A(s)$ και $sE - A$ είναι d.e.

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε ότι η παρακάτω σχέση μεταξύ του $sE - A$

και του $A(s)$ είναι και αυτή μια d.e. σχέση:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -(sI_r - \Lambda_0) s^{q-2} E_0(s) \\ -(sI_r - \Lambda_0) s^{q-3} E_1(s) \\ \vdots \\ -(sI_r - \Lambda_0) E_{q-2}(s) \\ (sI_r - \Lambda_0) s^{q-1} \end{bmatrix}}_{M(s)} \begin{matrix} \text{Τ} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} sI_r & -I_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & sI_r & -I_r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & sI_r & -I_r \\ A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{q-2} & sA_q + A_{q-1} \end{bmatrix}}_{sE-A} =$$

$$= A(s) \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{r,(q-1)r} & (sI_r - \Lambda_0) \end{bmatrix}}_{N(s)}$$

(5.10)

όπου $E_i(s) = E_{i-1}(s) + A_i s$, $i = 0, 1, \dots, q-2$ με τα $E_0 = A_0$ και Λ_0 όπως έχει οριστεί στην αρχή της απόδειξης. ■

Οι συνθήκες της d.e. εξαναγκάζουν τους πίνακες μετασχηματισμού να υπακούουν σε κάποιους περιορισμούς όσον αφορά τους βαθμούς τους. Αυτό φαίνεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 65 α) Έστω $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ διαστάσεων $m \times m$ και $(m+r) \times (m+r)$ αντίστοιχα όπου $r \neq 0$ δύο d.e. πίνακες. Τότε οι δύο συνθήκες της d.e. συνεπάγονται ότι $\deg M(s) \leq \deg A_2(s)$ και $\deg N(s) \leq \deg A_1(s)$.

β) Έστω $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ πίνακες ίδιων διαστάσεων $r \times r$ και ίδιου βαθμού d . Αν οι $A_1(s)$ και $A_2(s)$ είναι d.e. τότε $\deg M(s) = \deg N(s)$.

Απόδειξη.

α) Στη συνέχεια με A^h θα συμβολίζουμε τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή του πολωνυμικού πίνακα $A(s)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πίνακας $M(s)$ που ικανοποιεί την (5.2) με $\deg M(s) > \deg A_2(s)$. Για να μην έχει άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες ο $\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}$ πρέπει ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου να έχει πλήρη τάξη γραμμών δηλαδή $\text{rank} \begin{bmatrix} M^h & 0 \end{bmatrix} = m+r$. Αυτό είναι αδύνατο εξαιτίας των διαστάσεων του πίνακα $M^h \in \mathbb{R}^{(m+r) \times m}$. Άρα $\deg M(s) \leq \deg A_2(s)$. Έστω τώρα ότι ισχύει $\deg N(s) > \deg A_1(s)$. Τότε υπάρχει $d \neq 0$ τέτοιο ώστε $\deg A_1(s) + d = \deg N(s)$. Η πρώτη συνθήκη της d.e. υποδηλώνει ότι οι $A_1(s)$ και $A_2(s)$ είναι γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (e.u.e) σύμφωνα με τον ορισμό 16 και σαν τέτοιοι θα έχουν

ιδίους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες και ίδιο αριθμό πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A_1(s)) = \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A_2(s)). \quad (5.11)$$

Παίρνοντας τώρα την δυική της σχέσης της d.e. έχουμε

$$\begin{bmatrix} M'(w) & \tilde{A}_2(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^d \tilde{A}_1(w) \\ -\tilde{N}(w) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.12)$$

Εφόσον οι αρχικοί σύνθετοι πίνακες δεν είχαν στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο, οι block πίνακες στην (5.12) δεν θα έχουν πεπερασμένο διαιρέτη στο $s = 0$ και άρα η (5.12) είναι μια σχέση $\{0\}$ -ισοδυναμίας. Άρα οι πίνακες $\tilde{A}_2(w)$ και $w^d \tilde{A}_1(w)$ έχουν ιδίους πεπερασμένους διαιρέτες στο 0. Συμβολίζοντας με $\mathcal{S}_l(A(w))$ τον συνολικό αριθμό στοιχειωδών διαιρετών στο $s = l$ του $A(w)$ παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(\tilde{A}_2(w)) = \mathcal{S}_0(w^d \tilde{A}_1(w)) > \mathcal{S}_0(\tilde{A}_1(w)) &\implies \\ \mathcal{S}_0(\tilde{A}_2(w)) > \mathcal{S}_0(\tilde{A}_1(w)) &\implies \mathcal{S}_{\infty}(A_2(s)) > \mathcal{S}_{\infty}(A_1(s)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ενθυμούμενοι ότι $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$, ισχύει

$$c = \mathcal{S}_{\infty}(A_2(s)) + \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A_2(s)) = \mathcal{S}_{\infty}(A_1(s)) + \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A_1(s))$$

ή ισοδύναμα λόγω της (5.11) συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{S}_{\infty}(A_2(s)) = \mathcal{S}_{\infty}(A_1(s))$ σχέση που αντιβαίνει με την (5.13).

β) Σαν πρώτο βήμα θα αποδείξουμε ότι αν ένας από τους δύο πίνακες μετασχηματισμού έχει βαθμό μεγαλύτερο του d , τότε $\deg M(s) = \deg N(s)$. Ξεκινάμε με τους εξής συμβολισμούς:

$$\begin{aligned} d_M &= \deg M(s), \quad d_N = \deg N(s) \\ D_L &= \deg \begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} ; \quad D_R = \deg \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \\ d &= \deg A_1(s) = \deg A_2(s). \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M(s)} & \widetilde{A_2(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^{-d_M+D_L}\tilde{M}(w) & w^{-d+D_L}\tilde{A}_2(w) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A_1(s)} \\ \widetilde{-N(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^{-d+D_R}\tilde{A}_1(w) \\ -w^{-d_N+D_R}\tilde{N}(w) \end{bmatrix}.$$

Αν πάρουμε την δυική της σχέσης της d.e. έχουμε

$$\begin{bmatrix} w^{-d_M+D_L}\tilde{M}(w) & w^{-d+D_L}\tilde{A}_2(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{-d+D_R}\tilde{A}_1(w) \\ -w^{-d_N+D_R}\tilde{N}(w) \end{bmatrix} = 0. \quad (5.14)$$

Η σχέση (5.14) μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι σχέση {0}-ισοδυναμίας είτε μεταξύ των $w^{-d+D_L}\tilde{A}_2(w)$ και $w^{-d+D_R}\tilde{A}_1(w)$ είτε μεταξύ των $w^{-d_M+D_L}\tilde{M}(w)$ και $w^{-d_N+D_R}\tilde{N}(w)$. Άρα

$$\begin{cases} S_0(w^{-d_M+D_L}\tilde{M}(w)) = S_0(w^{-d_N+D_R}\tilde{N}(w)) \\ S_0(w^{-d+D_L}\tilde{A}_2(w)) = S_0(w^{-d+D_R}\tilde{A}_1(w)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} S_\infty M(s) + (-d_M + D_L)m = S_\infty N(s) + (-d_N + D_R)m \\ S_\infty A_2(s) + (-d + D_L)m = S_\infty A_1(s) + (-d + D_R)m \end{cases}. \quad (5.15)$$

Επειδή η d.e. διατηρεί τους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες (μια και εμπεριέχει τις συνθήκες της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας), έχουμε

$$\mathcal{S}_\mathbb{R}M(s) = \mathcal{S}_\mathbb{R}N(s) ; \mathcal{S}_\mathbb{R}A_2(s) = \mathcal{S}_\mathbb{R}A_1(s). \quad (5.16)$$

Οι πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ και άρα

$$\mathcal{S}_\mathbb{R}A_1(s) + \mathcal{S}_\infty A_1(s) = \mathcal{S}_\mathbb{R}A_2(s) + \mathcal{S}_\infty A_2(s) \xrightarrow{(5.15)} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_\mathbb{R}A_1(s) + \mathcal{S}_\infty A_2(s) + (-d + D_L)m - \\ & -(-d + D_R)m = \mathcal{S}_\infty A_2(s) + \mathcal{S}_\mathbb{R}A_2(s) \xrightarrow{(5.16)} \\ & D_L = D_R. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $d_M > d$. Τότε

$$D_L \stackrel{(5.18)}{=} D_R = d_M > d \quad (5.19)$$

κάτι που συνεπάγεται ότι ο βαθμός του block πίνακα είναι ίσος με d_M . Τότε εφόσον $d_M > d$ συμπεραίνουμε ότι $D_R = d_N$. Άρα $d_M = D_L = D_R = d_N$.

Αντίστοιχη απόδειξη ισχύει και στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι $d_N > d$. Δεύτερο βήμα της απόδειξης είναι το να δείξουμε ότι αν ένας από τους πίνακες μετασχηματισμού έχει βαθμό μικρότερο του d τότε ισχύει αναγκαστικά $\deg M(s) = \deg N(s)$. Υποθέτουμε ότι ο $N(s)$ έχει βαθμό d_N τέτοιο ώστε $d_N(s) < d_M(s) \leq d$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης ξέρουμε ότι αν ένας από τους πίνακες έχει βαθμό μικρότερο του d τότε ο άλλος δεν είναι δυνατόν να έχει βαθμό μεγαλύτερο του d . Εξισώνοντας τους πίνακες συντελεστές των μεγίστων βαθμών ως προς s της σχέσης της d.e. έχουμε ότι ισχύει

$$M^h A_1^h = 0. \quad (5.20)$$

Μια και $d_N(s) < d$, ο A_1^h έχει πλήρη τάξη στηλών πράγμα που συνεπάγεται ότι $\dim(\text{Ker}(M^h)) = m$. Έτσι $\text{rank}(M^h) = 0$ και άρα $\deg M(s) < d_M$ κάτι που έρχεται σε αντιπαράθεση με την υπόθεσή μας. ■

Μπορούμε πάντα να μεγαλώσουμε τον βαθμό των πολυωνυμικών πινάκων $A_1(s)$ και $A_2(s)$ που εμπλέκονται σε μια σχέση στοιχειώδους ισοδυναμίας, χωρίς να επηρεάσουμε τους αρχικούς πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες, πολλαπλασιάζοντάς τους με συγκεκριμένα πολυώνυμα, όπως περιγράφεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 66 Αν ο $A_1(s)(s - s_0)^k \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$ έχει τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον $A_2(s)(s - s_0)^k \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$, όπου το $s_0 \neq 0$ δεν είναι μηδενικό ούτε του $A_1(s)$ ούτε του $A_2(s)$, τότε οι $A_1(s)$ και $A_2(s)$ έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή έχοντας υπ'όψιν μας ότι

- α) οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του $A_1(s)(s - s_0)^k$ είναι αυτοί του $A_1(s)$ με επιπλέον m διαιρέτες τις μορφής $(s - s_0)^k$ και
- β) οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο του $A_1(s)(s - s_0)^k \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$, όπου $s_0 \neq 0$ όχι μηδενικό του $A_1(s)$, είναι οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο του $A_1(s)$. ■

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι η στοιχειώδης ισοδυναμία αφήνει αναλλοίωτους τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες των πολυωνυμικών πινάκων.

Θεώρημα 67 Οι πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι (d.e.). αν-ν έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Απόδειξη. (\implies) (α) Σύμφωνα με την πρώτη συνθήκη της d.e., οι $A_1(s)$ και $A_2(s)$ είναι και γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι. Άρα θα έχουν τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες.

(β) Θα δείξουμε ότι η δεύτερη συνθήκη της d.e. συνεπάγεται ότι οι δύο πολυωνυμικοί πίνακες έχουν τους ίδιους άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν οι πίνακες έχουν ίδιες ή διαφορετικές διαστάσεις.

(1) Έστω $A_1(s)$ και $A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ με διαστάσεις $m \times m$ και $(m+r) \times (m+r)$ αντίστοιχα όπου $r \neq 0$. Τότε από το λήμμα 65α, οι δύο πρώτες συνθήκες της d.e. συνεπάγονται τις επόμενες σχέσεις μεταξύ των βαθμών των πινάκων

$$\begin{aligned} \deg M(s) &\leq \deg A_2(s) \\ \deg N(s) &\leq \deg A_1(s). \end{aligned}$$

Έστω $d_{MA_2} = \deg \begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}$ και $d_{A_1N} = \deg \begin{bmatrix} A_1(s)^\top & -N(s)^\top \end{bmatrix}^\top$. Τότε θέτοντας $s = \frac{1}{w}$, η (5.2) μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$\begin{bmatrix} M(\frac{1}{w}) & A_2(\frac{1}{w}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(\frac{1}{w}) \\ -N(\frac{1}{w}) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.21)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και αριστερά την (5.21) με $w^{d_{MA_2}}$ και $w^{d_{A_1N}}$ αντίστοιχα έχουμε

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M(w)} & \widetilde{A_2(w)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A_1(w)} \\ -\widetilde{N(w)} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.22)$$

Ξέρουμε ότι $d_{MA_2} \leq \deg [A_2(s)]$ και $d_{A_1N} \leq \deg [A_1(s)]$ και άρα η (5.22) ξαναγράφεται σαν

$$\begin{bmatrix} M'(w) & \tilde{A}_2(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_1(w) \\ -N'(w) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.23)$$

Ο block πίνακας $\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}$ (αντίστοιχα ο $\begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$) δεν έχει άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες και άρα ο δυικός του $\begin{bmatrix} M'(w) & \tilde{A}_2(w) \end{bmatrix}$ (αντίστοιχα $\begin{bmatrix} \tilde{A}_1(w) \\ -N'(w) \end{bmatrix}$) δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά στο $w = 0$. Άρα η (5.23) είναι μια σχέση $\{0\}$ -ισοδυναμίας που διατηρεί τους διαιρέτες των $\tilde{A}_1(w), \tilde{A}_2(w)$ στο $w = 0$ ή ισοδύναμα τους στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο των $A_1(s), A_2(s)$.

2) Έστω $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ με τον ίδιο βαθμό d . Τότε σύμφωνα με το λήμμα 65b, ισχύει $d_t = \deg M(s) = \deg N(s)$. Στην περίπτωση που $d_t \leq d$ τότε η απόδειξη είναι ίδια με την περίπτωση 1) λίγες γραμμές πιο πάνω. Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που $d_t > d$. Έστω ένα $s_0 \neq 0$ που δεν είναι μηδενικό των $A_1(s)$ και $A_2(s)$. Τότε η σχέση

$$\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s)(s - s_0)^{d_t-d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s)(s - s_0)^{d_t-d} \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.24)$$

είναι μια σχέση γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας, κάτι που συνεπάγεται ότι οι $A_2(s)(s - s_0)^{d_t-d}$ και $A_1(s)(s - s_0)^{d_t-d}$ έχουν τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Άρα σύμφωνα με το λήμμα 66 και οι $A_1(s), A_2(s)$ θα έχουν τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Παίρνοντας την δυική της (5.24) έχουμε

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M}(s) & \widetilde{A_2(s)(s - s_0)^{d_t-d}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A_1(s)(s - s_0)^{d_t-d}} \\ -\widetilde{N(s)} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.25)$$

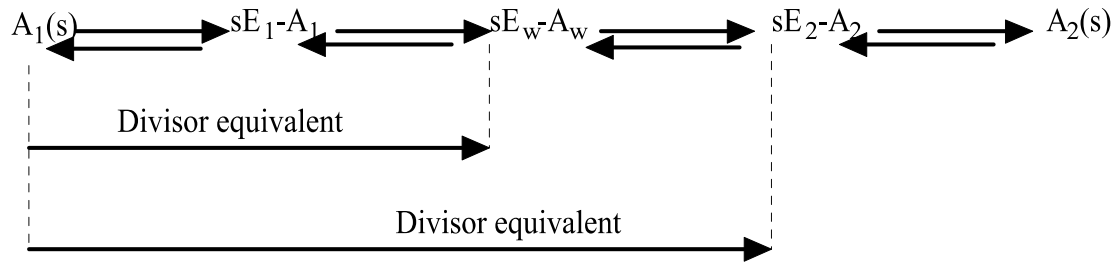
Η (5.25) είναι σχέση $\{0\}$ -ισοδυναμίας και άρα οι

$$\widetilde{A_2(s)(s - s_0)^{d_t-d}} \text{ και } \widetilde{A_1(s)(s - s_0)^{d_t-d}}$$

έχουν ίδιους στοιχειώδεις διαιρέτες στο 0 που συνεπάγεται ότι οι $A_2(s)(s - s_0)^{d_t-d}$ και $A_1(s)(s - s_0)^{d_t-d}$ έχουν ίδιους διαιρέτες στο άπειρο, κάτι που μέσω του λήμματος 66 θα ισχύει και για τους $A_2(s)$ και $A_1(s)$.

(\Leftarrow). Υποθέτουμε ότι οι $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ έχουν ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Τότε σύμφωνα με το λήμμα 64, οι $A_1(s)$ και $A_2(s)$ θα είναι d.e. με πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες

$sE_1 - A_1$ και $sE_2 - A_2$ της μορφής (5.8). Οι πρωτοβάθμιοι πίνακες $sE_1 - A_1$ και $sE_2 - A_2$ είναι αυστηρά ισοδύναμοι με τις αντίστοιχες Weierstrass κανονικές μορφές τους [Gan59]. Εφόσον οι $sE_1 - A_1$, $sE_2 - A_2 \in \mathbb{R}_c[s]$ έχουν ίδια δομή διαιρετών, θα έχουν και την ίδια κανονική μορφή Weierstrass $sE_w - A_w$. Χρησιμοποιώντας την μεταβατική ιδιότητα που αποδείχθηκε στο λήμμα 63 μπορούμε να δείξουμε ότι ο $A_1(s)$ είναι d.e. με τον $sE_2 - A_2$, κάτι που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άρα υπάρχουν πολωνυμικοί πίνακες $A(s)$ και $B(s)$ τέτοιοι ώστε ο επόμενος μετασχηματισμός

$$A(s)(sE_2 - A_2) = A_1(s)B(s) \quad (5.26)$$

να είναι ένας d.e. μετασχηματισμός. Οι πολωνυμικοί πίνακες $sE_2 - A_2$ και $A_2(s)$, σύμφωνα με το λήμμα 64 συνδέονται με την επόμενη d.e. σχέση

$$\begin{pmatrix} 0 \\ sI - \Lambda_0 \end{pmatrix} A_2(s) = (sE_2 - A_2) \begin{pmatrix} sI - \Lambda_0 \\ (sI - \Lambda_0)s \\ \vdots \\ (sI - \Lambda_0)s^{q_2-1} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

όπου $q_2 = \deg [A_2(s)]$ και $sI - \Lambda_0$ όπως ορίστηκε στο λήμμα 64. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά την (5.27) με $A(s)$ και χρησιμοποιώντας την (5.26) έχουμε

$$\left\{ A(s) \begin{pmatrix} 0 \\ sI - \Lambda_0 \end{pmatrix} \right\} A_2(s) = A_1(s) \left\{ B(s) \begin{pmatrix} sI - \Lambda_0 \\ (sI - \Lambda_0)s \\ \vdots \\ (sI - \Lambda_0)s^{q_2-1} \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.28)$$

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με $(s - s_0)$ παίρνουμε

$$\left\{ A(s) \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \right\} A_2(s) = A_1(s) \left\{ B(s) \begin{pmatrix} I \\ sI \\ \vdots \\ s^{q_2-1}I \end{pmatrix} \right\} \iff \quad (5.29)$$

$$\left[A(s) \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad A_1(s) \right] \begin{bmatrix} A_2(s) \\ -B(s) \begin{pmatrix} I \\ sI \\ \vdots \\ s^{q_2-1}I \end{pmatrix} \end{bmatrix} = 0.$$

Θα δείξουμε ότι η (5.29) είναι μια d.e. σχέση. Για να αποδείξουμε την απουσία πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών στους block πίνακες

$$\left[A(s) \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad A_1(s) \right] \text{ και } \begin{bmatrix} A_2(s) \\ -B(s) \begin{pmatrix} I \\ sI \\ \vdots \\ s^{q_2-1}I \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

αρκεί να δείξουμε ότι οι πίνακες της (5.30) έχουν ίδια δομή διαιρετών με τους

$$\left[A(s) \quad A_1(s) \right] \text{ και } \begin{bmatrix} sE_2 - A_2 \\ -B(s) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

αντίστοιχα, μια και σύμφωνα με τον d.e. μετασχηματισμό (5.26), οι πίνακες της (5.31) δεν έχουν ούτε πεπερασμένους ούτε άπειρους διαιρέτες.

(1) Ο πρώτος στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} sE_2 - A_2 \\ -B(s) \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} A_2(s) \\ -B(s) \begin{pmatrix} I \\ sI \\ \vdots \\ s^{q_2-1}I \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

(1α) - *Πεπερασμένοι διαιρέτες*

Ο μετασχηματισμός

$$\left[\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} & 0 & sE_2 - A_2 \\ 0 & I & -B(s) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A_2(s) \\ -B(s) \begin{pmatrix} I \\ sI \\ \vdots \\ s^{q_2-1}I \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} I \\ sI \\ \vdots \\ s^{q_2-1}I \end{pmatrix} \end{array} \right] = 0$$

είναι μια σχέση γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας, καθώς οι block πίνακες περιέχουν τον μοναδιαίο πίνακα και άρα δεν έχουν πεπερασμένους διαιρέτες.

(1β) - *Άπειροι διαιρέτες*

Έστω η σχέση

$$\left[\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 \\ (sI - \Lambda_0) \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & sE_2 - A_2 \\ & (sI - \Lambda_0) & -B(s) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A_2(s) \\ -B(s) \begin{pmatrix} I \\ sI \\ \vdots \\ s^{q_2-1}I \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} I \\ sI \\ \vdots \\ s^{q_2-1}I \end{pmatrix} (sI - \Lambda_0) \end{array} \right] = 0 \tag{5.33}$$

Οι μεγιστοβάθμιοι συντελεστές των παραπάνω block πινάκων είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{q_2} \\ 0 & I & & & & & -B_1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} A_{2,q_2} \\ -B_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

όπου $B(s) = B_0 + B_1 s$ και $A_2(s) = A_{2,0} + A_{2,1}s + \cdots + A_{2,q_2}s^{q_2}$ με $A_{2,q_2} \neq 0$. Οι πίνακες έχουν πλήρη τάξη γραμμών και στηλών αντίστοιχα και άρα οι πίνακες της (5.33) δεν έχουν άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Άρα οι πίνακες (5.32) είναι d.e. και σαν τέτοιοι έχουν ίδια δομή στοιχειωδών διαιρετών.

(2) Ο δεύτερος στόχος μας είναι να δείξουμε ότι οι πίνακες

$$\left[A(s) \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad A_1(s) \right] \quad \text{και} \quad \left[A(s) \quad A_1(s) \right] \quad (5.34)$$

έχουν ίδια δομή στοιχειωδών διαιρετών.

(2α) Πεπερασμένοι διαιρέτες

Έστω ο μετασχηματισμός

$$I \left[A(s) \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad A_1(s) \right] = \left[A(s) \quad A_1(s) \right] \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Και οι δύο block πίνακες περιέχουν τον μοναδιαίο πίνακα και άρα δεν έχουν πεπερασμένους διαιρέτες. Άρα η σχέση είναι σχέση γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας και έτσι οι πίνακες (5.34) έχουν ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες.

(2β) Άπειροι διαιρέτες

Έστω ο μετασχηματισμός

$$\begin{aligned}
 & [(sI - \Lambda_0)^{q_1}] \left[A(s) \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad A_1(s) \right] = \\
 & = \left[A(s) \quad A_1(s) \right] \left[\begin{pmatrix} 0 \\ (sI - \Lambda_0)^{q_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \right] \iff \quad (5.35) \\
 & \left[(sI - \Lambda_0)^{q_1} \quad A(s) \quad A_1(s) \right] \left[\begin{matrix} A(s) \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} & A_1(s) \\ - \begin{pmatrix} 0 \\ (sI - \Lambda_0)^{q_1} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & - (sI - \Lambda_0)^{q_1} \end{matrix} \right] = 0
 \end{aligned}$$

όπου $A(s) = A_0 + A_1s + \dots + A_{q_1}s^{q_1}$ και $A_1(s) = A_{1,0} + A_{1,1}s + \dots + A_{1,q_1}s^{q_1}$ με $A_{1,q_1} \neq 0$. Οι μεγιστοβάθμιοι συντελεστές των παραπάνω block πινάκων είναι:

$$\left[I \quad A_{q_1} \quad A_{1,q_1} \right] \text{ και } \left[\begin{matrix} A_{q_1} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} & A_{1,q_1} \\ - \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & -I \end{matrix} \right]$$

Οι πίνακες έχουν πλήρη τάξη γραμμών και στηλών αντίστοιχα και άρα οι block πίνακες στην (5.33) δεν έχουν άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Άρα οι πίνακες στην (5.34) είναι d.e. και άρα έχουν τους ίδιους διαιρέτες.

Στην απόδειξη της αναγκαιότητας του θεωρήματος, είναι δυνατόν να αρχίσουμε με τον πίνακα $A_2(s)$ και ακολουθώντας ίδια λογική να προσπαθήσουμε να παράγουμε ένα d.e. μετασχηματισμό ανάμεσα στον $A_2(s)$ και τον $A_1(s)$ της μορφής $M(s)A_2(s) = A_1(s)N(s)$. ■

Παρατήρηση 68 Από την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, εύκολα φαίνεται ότι η πρώτη συνθήκη της στοιχειώδους ισοδυναμίας εγγυάται το να μείνουν αναλλοίωτοι οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες, ενώ η δεύτερη συνθήκη όντως εξασφαλίζει το αναλλοίωτο των άπειρων στοιχειωδών διαιρέτων. Άρα για να δείξουμε ότι δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$

έχουν ίδια δομή πεπερασμένων (αντίστοιχα άπειρων) διαιρετών, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $M(s), N(s)$ καταλλήλων διαστάσεων έτσι ώστε να ισχύει η $M(s)A_1(s) = A_2(s)N(s)$ και η πρώτη (δεύτερη) συνθήκη.

Πόρισμα 69 Οι πολυωνυμικοί πίνακες που ορίστηκαν στο λήμμα 64 είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι και άρα έχουν ίδια δομή πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών.

Το προηγούμενο πόρισμα έχει ήδη αποδειχθεί με διαφορετικό τρόπο στις [Pra91] και [VA03].

Παράδειγμα 70 Έστω ο μετασχηματισμός

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 & 1 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix}}_{A_1(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 & 1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix}}_{A_2(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s^3 & s+1 \\ 0 & -s \end{bmatrix}}_{N(s)}$$

Οι πίνακες $A_1(s), A_2(s)$ ανήκουν στο $\mathbb{R}_6[s]$. Η πεπερασμένη Smith μορφή του $\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}$ είναι

$$S^{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} (s) = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \end{bmatrix}$$

ενώ η Smith μορφή στο 0 του

$$M_1(s) := \widetilde{\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} s+s^2 & 0 & 1 & s^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & s & s^2 \\ 0 & -s^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι

$$S_{M_1(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα ο block πίνακας $\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}$ δεν έχει πεπερασμένους ή άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες. Επίσης

$$S^{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} (s) = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και αν ορίσω

$$N_1(s) := \begin{bmatrix} \widetilde{A_1(s)} \\ -N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & s^3 \\ 0 & 1 \\ -s^3 & 0 \\ -1 & -s^2 - s^3 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}$$

έχω

$$S_{N_1(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο πίνακας $\begin{bmatrix} A_1(s)^\top & -N(s)^\top \end{bmatrix}^\top$ δεν έχει στοιχειώδεις διαιρέτες. Άρα οι $A_1(s)$ και $A_2(s)$ είναι d.e. και άρα σύμφωνα με το θεώρημα 67 θα έχουν ίδια δομή στοιχειωδών διαιρετών. Βρίσκουμε τις Smith μορφές

$$S_{A_1(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^5 \end{bmatrix}; S_{A_2(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & s^5 \end{bmatrix}$$

και αυτές των διυκών τους στο 0

$$S_{\tilde{A}_1(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}; S_{\tilde{A}_2(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Όντως παρατηρούμε ότι έχουν το s^5 σαν πεπερασμένο διαιρέτη και ένα στοιχειώδη διαιρέτη στο άπειρο τάξης 1. Επίσης εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το άθροισμα του αριθμού των στοιχειωδών μηδενικών είναι όντως το γινόμενο της διάστασης με το βαθμό του πίνακα δηλαδή

$$5 + 1 = 2 * 3 = 3 * 2.$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι στην ειδική περίπτωση των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων ίδιας διάστασης, η στοιχειώδης ισοδυναμία και η αυστηρή ισοδυναμία, ορίζουν την ίδια κλάση πινάκων.

Θεώρημα 71 Έστω δύο πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες $sE_1 - A_1, sE_2 - A_2 \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ με $\det[sE_i - A_i] \neq 0, i = 1, 2$. Τότε οι $sE_1 - A_1$ και $sE_2 - A_2$ είναι αυστηρά ισοδύναμοι αν-ν είναι d.e.

Απόδειξη. (\implies) Αν οι $sE_1 - A_1$ και $sE_2 - A_2$ είναι αυστηρά ισοδύναμοι τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι σταθεροί πίνακες $M, N \in \mathbb{R}^{m \times m}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει η σχέση

$$M [sE_1 - A_1] N = [sE_2 - A_2]$$

ή ισοδύναμα

$$M [sE_1 - A_1] = [sE_2 - A_2] N^{-1}.$$

Διαλέγουμε s_0 τέτοιο ώστε $\det [s_0 E_i - A_i] \neq 0$, $i = 1, 2$ και κατασκευάζουμε τον μετασχηματισμό

$$[(s - s_0) M] [sE_1 - A_1] = [sE_2 - A_2] [(s - s_0) N^{-1}]$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η παραπάνω σχέση είναι ένας d.e. μετασχηματισμός.

(\longleftarrow) Έστω ότι οι $sE_1 - A_1$ και $sE_2 - A_2$ είναι d.e.. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 67, θα έχουν ίδια δομή στοιχειωδών διαιρετών. Άρα σύμφωνα με την [Gan59], οι πίνακες θα είναι και αυστηρά ισοδύναμοι. ■

Οι αυστηρή και η στοιχειώδης ισοδυναμία, παράγουν ίδιες κλάσεις ισοδυναμίας στην περίπτωση των πρωτοβάθμιων πινάκων. Όμως επειδή η d.e. αναφέρεται σε γενικούς πολυωνμικούς πίνακες, παράγει μεγαλύτερες κλάσεις ισοδυναμιών στο σύνολο $\mathbb{R}_c[s]$. Με το παρακάτω θεώρημα θα αποδείξουμε ότι η σχέση της στοιχειώδους ισοδυναμίας, είναι όντως μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}_c[s]$.

Θεώρημα 72 Η στοιχειώδης ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}_c[s]$.

Απόδειξη. (α) Ανακλαστικότητα. Έστω $A(s) \in \mathbb{R}_c[s]$. Θεωρούμε την παρακάτω ισότητα

$$\left[\begin{array}{cc} (s - s_0)^{\deg[A]} I & A(s) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A(s) \\ - (s - s_0)^{\deg[A]} I \end{array} \right] = 0$$

όπου s_0 δεν είναι μηδενικό του πίνακα $A(s)$. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση d.e.

(β) Συμμετρία. Έστω δύο πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ που συνδέονται με d.e. σχέση της μορφής

$$M(s)A_1(s) = A_2(s)N(s) \tag{5.36}$$

Τότε από το θεώρημα 67, οι $A_1(s)$ και $A_2(s)$ έχουν ίδια δομή πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών. Έτσι από το αντίστροφο του θεωρήματος 67 (βλέπε τη σημείωση στο τέλος της απόδειξης) υπάρχει μια d.e. σχέση μεταξύ του $A_2(s)$ και $A_1(s)$ της γνωστής μορφής (5.2).

(γ) *Μεταβατικότητα.* Έστω $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ δύο d.e. πίνακες και $A_2(s), A_3(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ επίσης d.e.. Τότε από το θεώρημα 67 οι $A_1(s)$ και $A_3(s)$ έχουν ίδιους στοιχειώδης διαιρέτες. Άρα μέσω του θεωρήματος 67, οι $A_1(s)$ και $A_3(s)$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι. ■

5.3 Στοιχειώδης ισοδυναμία και αυτοπαλλίνδρομα συστήματα

Έστω μια γραμμική, ομογενής εξίσωση διαφορών της μορφής

$$A(\sigma)\beta(k) = 0, \quad k \in [0, N] \quad (5.37)$$

$$A(\sigma) = A_q\sigma^q + A_{q-1}\sigma^{q-1} + \dots + A_0 \in \mathbb{R}[\sigma]^{r \times r} \quad (5.38)$$

όπου με σ συμβολίζεται ο τελεστής μετατόπισης προς τα μπρος δηλαδή $\sigma\beta(k) = \beta(k+1)$, ενώ $\beta(k) : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^r$ είναι μια ακολουθία διανυσμάτων. Ακολουθώντας την ορολογία του Willems ([Wil86], [Wil89], [Wil91]), ονομάζουμε τις εξισώσεις (5.37) μια αυτοπαλλίνδρομη αναπαράσταση (AutoRegressive representation) της συμπεριφοράς $B_{A(\sigma)}$ (behavior) του συστήματος όπου το $B_{A(\sigma)}$ ορίζεται ως εξής:

$$B_{A(\sigma)} := \{\beta(k) : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^r : (5.37) \text{ ικανοποιείται } \forall k \in [0, N]\}.$$

Στην ειδική περίπτωση που ο πίνακας $A(\sigma)$ είναι πρώτου βαθμού, δηλαδή αν $A(\sigma) = \sigma E - A$, αποδείχθηκε ότι η διακριτή αυτοπαλλίνδρομη παράσταση παρουσιάζει μη αιτιατή συμπεριφορά και για αυτό φαίνεται απολύτως φυσική η επιλογή να μελετηθεί σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, N]$ όπου το σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε ένα καθαρά αιτιατό (causal) και σε ένα αντιατιατό (anticausal) μέρος (βλέπε [Lue77], [Lue89], [Lew84], [LM90],

[Lew86], [NWL87]). Τα δύο αυτά μέρη του συστήματος, αποδείχθηκε ότι συνδέονται άμεσα με την πεπερασμένη και άπειρη δομή των στοιχειωδών διαιρετών του πολυωνυμικού πίνακα $A(\sigma)$ που περιγράφει το σύστημα (βλέπε [Lew84] για την πρωτοβάθμια και την [AVK98] για συστήματα μεγαλύτερου βαθμού). Στην γενικότερη μορφή όπου ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας που περιγράφει το σύστημα είναι μη τετράγωνος, η αιτιατή και μη αιτιατή συμπεριφορά του εξαρτάται όχι μόνο από τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες αλλά και από τους δεξιούς ελάχιστους δείκτες [AKI97]. Η αιτιατή συμπεριφορά του συστήματος (5.37) στην περίπτωση που ο $A(\sigma)$ είναι κανονικός πολυωνυμικός πίνακας μελετήθηκε εκτενώς στην [GLR82]. Τα αποτελέσματα αυτά γενικεύτηκαν για ιδιάζοντα τετράγωνα συστήματα στην [AVK98], όπου μελετήθηκε και η μη αιτιατή συμπεριφορά. Η γενική περίπτωση όπου το σύστημα περιγράφεται από ένα όχι κατ'ανάγκη τετράγωνο πολυωνυμικό πίνακα, μελετήθηκε από τον Karampetakis [Kar02], όπου δείχθηκε ότι επιπλέον ο δεξιός πυρήνας του $A(\sigma)$ παίζει κρίσιμο ρόλο στην συμπεριφορά του συστήματος (5.37) ενώ ο αριστερός στην συμβιδιαστικότητα των αρχικών και τελικών συνθηκών.

Στην [VA03] ορίστηκε η θεμελιώδης ισοδυναμία (fundamental equivalence) δύο AR αναπαραστάσεων. Δύο AR αναπαραστάσεις θα λέγονται θεμελιωδώς ισοδύναμες αν-ν οι χώροι λύσεων τους (συμπεριφορές) είναι ισόμορφες με ένα συγκεκριμένο τρόπο όπως θα δούμε στον ορισμό 75 πιο κάτω. Η συμπεριφορά της AR αναπαράστασης (5.37), όταν την θεωρούμε σε ένα πεπερασμένο διάστημα $[0, N]$, εξαρτάται από την αλγεβρική δομή των πεπερασμένων και άπειρων στοιχειωδών διαιρετών του πολυωνυμικού πίνακα $A(\sigma)$ που σχετίζεται με την (5.37). Αποδείχθηκε ότι αυτή η δομή είναι ίδια με αυτή του block συνοδεύοντος πίνακα $\sigma\bar{E} - \bar{A} \in \mathbb{R}[\sigma]^{rq \times rq}$ που αποτελεί μια γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα [AVK98] και κατά συνέπεια η AR που συνδέεται με τον $\sigma\bar{E} - \bar{A}$ αποτελεί την κανονική πρωτοβάθμια θεμελιωδώς ισοδύναμη αναπαράσταση του (5.37). Έτσι στην [VA03] προτάθηκε μια γενίκευση της έννοιας της αυστηρής ισοδυναμίας *κανονικών πρωτοβάθμιων πινάκων* [Gan59] στην περίπτωση γενικών πολυωνυμικών πινάκων και αποδείχθηκε ότι δύο AR αναπαραστάσεις που περιγράφονται από κανονικούς πολυωνυμικούς πίνακες με πιθανόν διαφορετικούς βαθμούς και διαστάσεις εί-

ναι θεμελιωδώς ισοδύναμες αν-ν οι αντίστοιχοι πολυωνυμικοί πίνακες είναι αυστηρά ισοδύναμοι. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αυστηρή ισοδυναμία πολυωνυμικών πινάκων, όπως ορίστηκε στην [VA03] είναι ισοδύναμη με την στοιχειώδη ισοδυναμία, η οποία επιπλέον έχει το βασικό πλεονέκτημα να συνδέει άμεσα σε μια κλειστή σχέση τους δύο πολυωνυμικούς πίνακες. Η θεμελιώδης ισοδυναμία που προτάθηκε στην [VA03] γενικεύει τον ομομορφισμό συμπεριφορών που παρουσιάστηκαν στην [Fuh02], για μη κανονικές διακριτές αυτοπαλλίνδρομες αναπαραστάσεις της μορφής (5.37) πάνω από πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Παρόλα αυτά το βασικό μειονέκτημα αυτού του μετασχηματισμού είναι ότι δεν δίνει μια κλειστή σχέση που να συνδέει τους πολυωνυμικούς πίνακες των θεμελιωδώς ισοδύναμων διακριτών αυτοπαλλίνδρομων αναπαραστάσεων.

Συνεχίζουμε διερευνώντας την σχέση μεταξύ της αυστηρής και της θεμελιώδους ισοδυναμίας όπως αυτές ορίστηκαν από τους Vardulakis και Antoniou στην [VA03] με την στοιχειώδη ισοδυναμία.

Ορισμός 73 [VA03] *Οι πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ θα λέγονται αυστηρά ισοδύναμοι κατά την [VA03] αν-ν οι αντίστοιχοι πρωτοβάθμιοι πίνακες $sE_1 - A_1 \in \mathbb{R}^{c \times c}$ και $sE_2 - A_2 \in \mathbb{R}^{c \times c}$ όπως στην (5.8), είναι αυστηρά ισοδύναμοι σύμφωνα με τον ορισμό 17.*

Η ταύτιση της στοιχειώδους και της αυστηρής ισοδυναμίας (ορισμός 73) αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 74 *Η αυστηρή (ορισμός 73) και η στοιχειώδης ισοδυναμία ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι $A_1(s), A_2(s)$ είναι d.e.. Τότε

$$sE_1 - A_1 \stackrel{d.e.}{\sim} A_1(s) \stackrel{d.e.}{\sim} A_2(s) \stackrel{d.e.}{\sim} sE_2 - A_2$$

Άρα από την μεταβατική ιδιότητα της στοιχειώδους ισοδυναμίας, έχουμε ότι $sE_1 - A_1 \stackrel{d.e.}{\sim} sE_2 - A_2$. Όμως η ταύτιση της στοιχειώδους με την αυστηρή ισοδυναμία στην ειδική περίπτωση των πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων

αποδείχτηκε στο θεώρημα 71 και άρα οι δύο πρωτοβάθμιοι πίνακες είναι επίσης αυστηρά ισοδύναμοι.

Έστω τώρα ότι οι $A_1(s)$ και $A_2(s)$ είναι αυστηρά ισοδύναμοι σύμφωνα με τον ορισμό 73. Τότε ισχύει

$$A_1(s) \underset{s.e.}{\overset{d.e.}{\sim}} sE_1 - A_1 \underset{s.e.}{\overset{d.e.}{\sim}} sE_2 - A_2 \underset{s.e.}{\overset{d.e.}{\sim}} A_2(s)$$

και από την μεταβατική ιδιότητα της d.e. έχουμε $A_1(s) \underset{s.e.}{\overset{d.e.}{\sim}} A_2(s)$. ■

Η γεωμετρική ερμηνεία της αυστηρής ισοδυναμίας όπως παρουσιάστηκε από τους Vardulakis και Antoniou [VA03], δίνεται στην συνέχεια.

Ορισμός 75 [VA03] Δύο διακριτά αυτοπαλλίνδρομα συστήματα της μορφής

$$A_i(\sigma) \beta_i(k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, N - \deg[A_i(s)] \geq 0$$

όπου το σ είναι ο τελεστής μετατόπισης και $A_i(\sigma) \in \mathbb{R}[\sigma]^{r_i \times r_i}$, $\det[A_i(\sigma)] \neq 0$, $i = 1, 2$ θα λέγονται **θεμελιωδώς ισοδύναμα** ή **fundamentally equivalent (f.e.)** πάνω από το πεπερασμένο διάστημα $k = 0, 1, 2, \dots, N \geq \max \{ \deg[A_i(\sigma)] \}$ αν-ν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη πολυωνυμική απεικόνιση ανάμεσα στις αντίστοιχες συμπεριφορές τους $\mathcal{B}_{A_1(\sigma)}$, $\mathcal{B}_{A_2(\sigma)}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η θεμελιώδης ισοδυναμία αποτελεί μια επέκταση του ομομορφισμού συμπεριφορών που παρουσιάστηκε στις [Fuh02], [Fuh01] και [Fuh03], για την περίπτωση των μη κανονικών διακριτών αυτοπαλλίνδρομων παραστάσεων, όταν αυτές μελετούνται πάνω από πεπερασμένο διάστημα. Η θεμελιώδης ισοδυναμία (ορισμός 75) μπορεί να θεωρηθεί ως η γεωμετρική ερμηνεία της αυστηρής ισοδυναμίας (ορισμός 73), όπως φαίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 76 [VA03] Δύο διακριτά αυτοπαλλίνδρομα συστήματα της μορφής (5.37) είναι θεμελιωδώς ισοδύναμα αν-ν οι αντίστοιχοι πίνακες είναι αυστηρά ισοδύναμοι κατά τον ορισμό 73.

Χάρη στο παραπάνω θεώρημα, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι κάτι αντίστοιχο ισχύει και για την στοιχειώδη ισοδυναμία.

Θεώρημα 77 Δύο διακριτά αυτοπαλλίνδρομα συστήματα της μορφής (5.37) είναι θεμελιωδώς ισοδύναμα αν-ν οι αντίστοιχοι πίνακες είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Το θεώρημα αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα 74 και 76. ■

Παρακάτω δίνουμε μια γεωμετρική ερμηνεία του δεξιού πίνακα μετασχηματισμού που εμπλέκεται στον μετασχηματισμό της στοιχειώδους ισοδυναμίας (1.5). Έστω ότι οι πίνακες $A_1(s)$, $A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι. Τότε υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $M(s)$, $N(s)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$M(\sigma)A_1(\sigma) = A_2(\sigma)N(\sigma). \quad (5.39)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.39) από δεξιά με $\beta_1(k)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} M(\sigma)A_1(\sigma)\beta_1(k) = A_2(\sigma)N(\sigma)\beta_1(k) &\implies 0 = A_2(\sigma)N(\sigma)\beta_1(k) \implies \\ \exists \beta_2(k) \in \mathcal{B}_{A_2(\sigma)} \text{ τέτοιο ώστε } \beta_2(k) &= N(\sigma)\beta_1(k). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Σύμφωνα με τις συνθήκες της στοιχειώδους ισοδυναμίας, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A_1(\sigma)^\top & -N(\sigma)^\top \end{bmatrix}^\top$$

έχει πλήρη τάξη και όχι πεπερασμένους ή άπειρους διαιρέτες, κάτι που συνεπάγεται σύμφωνα με την [Kar02] ότι $\beta_1(k) = 0$. Άρα η απεικόνιση που ορίζεται από τον πολυωνυμικό πίνακα $N(s) : \mathcal{B}_{A_1(s)} \rightarrow \mathcal{B}_{A_2(s)} \mid \beta_1(k) \mapsto \beta_2(k)$ είναι ένεση. Χρησιμοποιώντας την συμμετρική ιδιότητα της d.e., μπορούμε να βρούμε πολυωνυμικούς πίνακες $\hat{M}(\sigma)$, $\hat{N}(\sigma)$ τέτοιους ώστε η σχέση $\hat{M}(\sigma)A_2(\sigma) = A_1(\sigma)\hat{N}(\sigma)$ να είναι μια σχέση στοιχειώδους ισοδυναμίας. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση που ορίζεται από τον πολυωνυμικό πίνακα $\hat{N}(\sigma) : \mathcal{B}_{A_2(s)} \rightarrow \mathcal{B}_{A_1(s)} \mid \beta_2(k) \mapsto \beta_1(k)$ είναι επίσης ένεση. Άρα και οι δύο απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί ανάμεσα στις συμπεριφορές $\mathcal{B}_{A_1(\sigma)}$, $\mathcal{B}_{A_2(\sigma)}$.

Η παραπάνω παρατήρηση για τον δεξιό πίνακα μετασχηματισμού $N(s)$, συμφωνεί πλήρως με τα αποτελέσματα που δημοσιεύτηκαν στο θεώρημα 4.3 της [Fuh02]. Η μόνη διαφορά είναι ότι μας ενδιαφέρουν ταυτόχρονα και το

αιτιατό και το μη αιτιατό μέρος της συμπεριφοράς μιας διακριτής αυτοπαλλινδρομης αναπαράστασης, ενώ η [Fuh02] αναφέρεται μόνο στο αιτιατό μέρος της συμπεριφοράς για συστήματα πάνω στο χρονικό διάστημα \mathbb{Z}^+ , των οποίων οι πολυωνυμικοί πίνακες δεν είναι κατ' ανάγκη τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι. Η πρώτη συνθήκη της d.e. δηλαδή το ότι οι block πίνακες πρέπει να είναι πλήρους τάξης και χωρίς πεπερασμένους διαιρέτες, εξασφαλίζει την ύπαρξη ισομορφισμού μεταξύ των αιτιατών μερών των συμπεριφορών των συστημάτων. Η επιπλέον συνθήκη της απουσίας απείρων στοιχειωδών διαιρέτων που εμφανίζεται στην d.e. εξασφαλίζει την ύπαρξη ισομορφισμού ανάμεσα στα μη αιτιατά μέρη των συμπεριφορών του συστήματος.

5.4 Συμπεράσματα

Οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών της μορφής (5.37) παρουσιάζουν μια προς τα εμπρός συμπεριφορά που οφείλεται στους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες του πολυωνυμικού πίνακα που περιγράφει το σύστημα και μια προς τα πίσω συμπεριφορά εξαιτίας των στοιχειωδών διαιρέτων στο άπειρο [AVK98]. Μια και η συμπεριφορά τέτοιων συστημάτων εξαρτάται από δομικά χαρακτηριστικά του πίνακα $A(\sigma)$ όπως οι στοιχειώδεις διαιρέτες, παρουσιάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο μια νέα ισοδυναμία μεταξύ κανονικών πολυωνυμικών πινάκων διαφορετικών βαθμών και διαστάσεων, που ονομάστηκε στοιχειώδης ισοδυναμία. Η στοιχειώδης ισοδυναμία διατηρεί ταυτόχρονα τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες ενός πολυωνυμικού πίνακα. Στην περίπτωση που οι πολυωνυμικοί πίνακες είναι πρώτου βαθμού, αποδείχθηκε ότι η στοιχειώδης ισοδυναμία είναι ισοδύναμη με την αυστηρή ισοδυναμία. Έτσι η στοιχειώδης ισοδυναμία μπορεί να θεωρηθεί σαν η πρώτη γενίκευση της αυστηρής ισοδυναμίας σε γενικούς πολυωνυμικούς πίνακες που δίνει μια κλειστή σχέση μεταξύ αυτών των πινάκων. Ένα πολύ ενδιαφέρον ερώτημα που αφήνει ανοιχτό αυτή η εργασία είναι ο ορισμός μιας ισοδυναμίας συστημάτων (system equivalence) για αυτοπαλλινδρομα συστήματα, βασισμένης στην στοιχειώδη ισοδυναμία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Μια νέα οικογένεια συνοδεύοντων πινάκων

6.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με κανονικούς πολυωνυμικούς πίνακες της μορφής

$$T(s) = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \dots + T_n, \quad (6.1)$$

με $T_i \in \mathbb{C}^{p \times p}$. Εφόσον ο $T(s)$ είναι κανονικός θα ισχύει $\det T(s) \neq 0$ για σχεδόν κάθε $s \in \mathbb{C}$. Ο παρακάτω πρωτοβάθμιος πίνακας

$$P(s) = sP_0 - P_1,$$

όπου

$$P_0 = \begin{bmatrix} T_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2 & \cdots & -T_n \\ I_p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

είναι γνωστός σαν η **πρώτη συνοδεύουσα μορφή** του $T(s)$. Η πρώτη συνοδεύουσα μορφή είναι γνωστό ότι είναι μια γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα $T(s)$ (βλέπε [GLR82]), υπάρχουν δηλαδή πολυωνυμικοί πίνακες $U(s)$

και $V(s)$ τέτοιοι ώστε

$$P(s) = U(s) \text{diag} \{T(s), I_{p(n-1)}\} V(s).$$

Μια άμεση συνέπεια του παραπάνω είναι ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή, έχει τους ίδιους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον $T(s)$. Οι Vardoulakis και Antonίου στην [VA03] και οι Pugh και Tan στην [TP02], απέδειξαν ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή έχει και ίδιους άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες με τον $T(s)$. Επιπλέον οι δύο πίνακες είναι και στοιχειωδώς ισοδύναμοι (βλέπε ορισμό 62), δηλαδή θα υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $M(s)$ και $N(s)$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0$$

και οι block πίνακες της σχέσης να ικανοποιούν τις συνθήκες στον ορισμό 62.

Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για την δεύτερη συνοδεύουσα μορφή του $T(s)$ όπως ορίστηκε από την

$$\hat{P}(s) = sP_0 - \hat{P}_1,$$

όπου το P_0 ορίστηκε στην (6.2) και

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} -T_1 & I_p & \cdots & 0 \\ -T_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_p \\ -T_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Εύκολα φαίνεται ότι $\det T(s) = \det P(s) = \det \hat{P}(s)$ και άρα οι $P(s)$, $\hat{P}(s)$ είναι κανονικοί πολυωνυμικοί πίνακες, αν-ν ο $T(s)$ είναι κανονικός.

Ο στόχος του κεφαλαίου είναι να προτείνει μια νέα οικογένεια συνοδευουσών μορφών για ένα κανονικό πολυωνυμικό πίνακα, η οποία μπορεί να παραμετροποιηθεί σαν γινόμενο απλών σταθερών πινάκων, μια ιδέα που πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Fiedler [Fie03] για την περίπτωση των πολυωνύμων. Αυτή οι οικογένεια περιέχει εκτός από τις γνωστές συνοδεύουσες μορφές και αρκετές άλλες οι οποίες δεν είχαν βρεθεί μέχρι στιγμής παρόλη την εκτεταμένη βιβλιογραφία του θέματος. Μην ξεχνάμε ότι οι συνοδεύουσες μορφές

πολυωνυμικών πινάκων ή ακόμα και απλών πολυωνύμων παίζουν σημαντικό ρόλο σε πολλά ερευνητικά προβλήματα διαφόρων κλάδων, είτε σαν θεωρητικό είτε σαν υπολογιστικό εργαλείο. Οι πρωτοβάθμιες αναπαραστάσεις είναι ευκολότερες να χειριστούν και προσφέρουν καλύτερη εποπτεία σε πολλά προβλήματα. Βλέποντας την πληθώρα των νέων αυτών συνοδευουσών μορφών, είναι εύκολο να επιλεγθούν κάποιες που θεωρούνται καταλληλότερες για συγκεκριμένα προβλήματα (π.χ. όταν έχουμε να κάνουμε με Ερμητιανούς πολυωνυμικούς πίνακες [GLR80], [GLR82], [RR94], [KL98], [MMX00] ή το πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών δευτεροβάθμιων πολυωνυμικών συστημάτων [TM01]). Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου δημοσιεύτηκαν από τους Αντονίου και Vologiannidis στην [AV04b].

6.2 Μια νέα οικογένεια συνοδευόντων πινάκων

Ακολουθώντας τα βήματα της [Fie03] ορίζουμε τους πίνακες

$$A_0 = \text{diag}\{T_0, I_{p(n-1)}\} \quad (6.3)$$

$$A_k = \begin{bmatrix} I_{p(k-1)} & 0 & \cdots \\ 0 & C_k & \ddots \\ \vdots & \ddots & I_{p(n-k-1)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.4)$$

$$A_n = \text{diag}\{I_{p(n-1)}, -T_n\} \quad (6.5)$$

όπου

$$C_k = \begin{bmatrix} -T_k & I_p \\ I_p & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Η παραπάνω ακολουθία πινάκων A_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι παράγει την πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $T(s)$.

Λήμμα 78 Οι πρώτη και δεύτερη συνοδευούσες μορφές του $T(s)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$P(s) = sA_0 - A_1A_2\dots A_n \quad (6.7)$$

$$\hat{P}(s) = sA_0 - A_nA_{n-1}\dots A_1. \quad (6.8)$$

Απόδειξη. Ακολουθώντας αντίστοιχα βήματα με την απόδειξη του λήμματος 2.1 στην [Fie03], φαίνεται εύκολα ότι το γινόμενο $A_1A_2\dots A_n$ είναι ίσο με τον πίνακα P_1 στην (6.2), ενώ ταυτόχρονα $A_0 = P_0$. Άρα η ισότητα ισχύει για το $P(s)$. Παρόμοια μπορούμε να αποδείξουμε την σχέση (6.8). ■

Πριν προχωρήσουμε στο βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου, χρειαζόμαστε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 79 Έστω E, F, G μια τριάδα τετράγωνων πινάκων, με F αντιστρέψιμο και $GE = EG$. Τότε

α) Ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$(\lambda E - GF)F^{-1}(sE - FG) = (sE - GF)F^{-1}(\lambda E - FG) \quad (6.9)$$

για κάθε $(s, \lambda) \in \mathbb{C}^2$.

β) Αν $\ker E^\top \cap \ker G^\top = \{0\}$ και $\lambda E - FG$ είναι αντιστρέψιμος για κάποια $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε ο $\lambda E - GF$ είναι επίσης αντιστρέψιμος.

Απόδειξη. α) Η σχέση (6.9) μπορεί να επαληθευτεί με απλές πράξεις χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $GE = EG$.

β) Υποθέτουμε ότι ο $\lambda E - GF$ είναι μη αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα γραμμής $x^\top \neq 0$ τέτοιο ώστε $x^\top(\lambda E - GF) = 0$. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την (6.9) με το x^\top και χρησιμοποιώντας την αντιστρεψιμότητα του $F^{-1}(\lambda E - FG)$, παίρνουμε ότι η

$$x^\top(sE - GF) = 0$$

ισχύει για κάθε $s \in \mathbb{C}$, ή ισοδύναμα ότι $x^\top E = 0$ και $x^\top GF = 0$. Παίρνοντας υπ' όψιν μας την αντιστρεψιμότητα του F , η $x^\top GF = 0$ ανάγεται στην $x^\top G = 0$. Άρα $x \in \ker E^\top \cap \ker G^\top = \{0\}$ κάτι που αντιβαίνει με την υπόθεση ότι το $x^\top \neq 0$. Άρα ο $\lambda E - GF$ είναι αντιστρέψιμος. ■

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί το βασικό εργαλείο στην προσπάθειά μας να κατασκευάσουμε την νέα οικογένεια των συνοδευουσών μορφών.

Θεώρημα 80 Έστω $P(s)$ η πρώτη συνοδεύουσα μορφή ενός κανονικού πολυωνυμικού πίνακα $T(s)$. Τότε για κάθε δυνατή μετάθεση (i_1, i_2, \dots, i_n) της n -άδας $(1, 2, \dots, n)$ ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(s) = sA_0 - A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_n}$ είναι ανστρέψιμος με τον $P(s)$, δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι σταθεροί πίνακες M, N τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$P(s) = MQ(s)N \quad (6.10)$$

όπου οι πίνακες $A_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ ορίστηκαν στις (6.3), (6.4) και (6.5).

Απόδειξη. Αν $(i_1, i_2, \dots, i_n) = (1, 2, \dots, n)$ τότε η (6.10) προφανώς ισχύει και έτσι ας συνεχίσουμε υποθέτοντας ότι $(i_1, i_2, \dots, i_n) \neq (1, 2, \dots, n)$. Παρατηρούμε ότι εξαιτίας της ειδικής δομής των A_i ισχύει η σχέση $A_iA_j = A_jA_i$ όταν $|i - j| > 1$, κάτι που μας δίνει την δυνατότητα να αλλάζουμε τις θέσεις των A_i έτσι ώστε

$$A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_n} = (A_{j_v+1}A_{j_v+2}\dots A_n)\dots(A_{j_1+1}A_{j_1+2}\dots A_{j_2})(A_1A_2\dots A_{j_1}) \quad (6.11)$$

όπου $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_v < n$. Για να αποφύγουμε να γράφουμε μεγάλα γινόμενα θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $A_{k,l} = A_kA_{k+1}\dots A_l$, με $k \leq l$. Έτσι ο πίνακας $Q(s)$ γράφεται

$$Q(s) = sA_0 - A_{j_v+1,n}\dots A_{j_1+1,j_2}A_{1,j_1}.$$

Παρατηρούμε ότι τα A_i είναι αντιστρέψιμα για $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ και άρα τα γινόμενα $A_{k,l}$ είναι επίσης αντιστρέψιμα για $0 < k \leq l < n$. Άρα ο A_{1,j_1} είναι αντιστρέψιμος. Το γινόμενο $(A_{j_v+1,n}\dots A_{j_1+1,j_2})$ δεν περιέχει τον πίνακα A_1 και άρα αντιμετατίθεται με το A_0 . Άρα οι $A_0, A_{1,j_1}, (A_{j_v+1,n}\dots A_{j_1+1,j_2})$ ικανοποιούν τις συνθήκες του λήμματος 79α) πράγμα που συνεπάγεται ότι

$$Q_0(\lambda)A_{1,j_1}^{-1}Q_1(s) = Q_0(s)A_{1,j_1}^{-1}Q_1(\lambda), \quad \forall (s, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \quad (6.12)$$

με $Q_0(s) = Q(s)$ και $Q_1(s) = sA_0 - A_{1,j_1}(A_{j_v+1,n}\dots A_{j_2+1,j_3})A_{j_1+1,j_2} = sA_0 - (A_{j_v+1,n}\dots A_{j_2+1,j_3})A_{1,j_2}$.

Με αντίστοιχο τρόπο όπως πριν, το λήμμα 79α) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στους πίνακες $A_0, A_{1,j_2}, (A_{j_v+1,n}\dots A_{j_2+1,j_3})$ για να πάρουμε την σχέση

$$Q_1(\lambda)A_{1,j_2}^{-1}Q_2(s) = Q_1(s)A_{1,j_2}^{-1}Q_2(\lambda), \quad \forall (s, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \quad (6.13)$$

όπου

$$Q_2(s) = sA_0 - A_{1,j_2}(A_{j_v+1,n} \cdots A_{j_3+1,j_4})A_{j_2+1,j_3} = sA_0 - (A_{j_v+1,n} \cdots A_{j_3+1,j_4})A_{1,j_3}.$$

Συνεχίζοντας με αυτό το τρόπο, μετά από v κυκλικές μεταθέσεις έχουμε ότι

$$Q_{v-1}(\lambda)A_{1,j_v}^{-1}Q_v(s) = Q_{v-1}(s)A_{1,j_v}^{-1}Q_v(\lambda), \quad \forall (s, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \quad (6.14)$$

όπου $Q_{v-1}(s) = sA_0 - A_{j_v+1,n}A_{1,j_v}$, $Q_v(s) = sA_0 - A_{1,j_v}A_{j_v+1,n} = sA_0 - A_{1,n} = P(s)$.

Για να επαληθεύσουμε την (6.10) απομένει να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε ο $Q_i(\lambda)$, $i = 0, 1, \dots, v$ να είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι ξεκινώντας από το $Q_v(s) = P(s)$ που είναι κανονικός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας (για και ο $T(s)$ είναι κι αυτός κανονικός), υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε ο $Q_v(\lambda)$ να είναι αντιστρέψιμος. Έχοντας υπ' όψιν μας την ιδιαίτερη δομή των πινάκων A_i , είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι $\ker A_0^\top \cap \ker A_{j_v+1,n}^\top = \{0\}$ ¹ και άρα το λήμμα 79β) θα ισχύει για τους πίνακες $A_0, A_{1,j_v}, A_{j_v+1,n}$. Άρα ο $Q_{v-1}(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος. Συνεχίζοντας επαγωγικά και με αντίστοιχο τρόπο μπορεί ναδειχθεί ότι ο $Q_i(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $i = v - 2, v - 3, \dots, 0$. ■

Το παραπάνω θεώρημα δηλώνει ότι κάθε πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας της μορφής $Q(s) = sA_0 - A_{i_1}A_{i_2} \cdots A_{i_n}$ έχει ίδια πεπερασμένη και άπειρη δομή στοιχειωδών διαιρετών με τον $T(s)$. Άρα για κάθε μετάδωση (i_1, i_2, \dots, i_n) της n -άδας $(1, 2, \dots, n)$ οι αντίστοιχοι συνοδευόντες πίνακες είναι εξαιτίας της μεταδατικής ιδιότητας, ανστηρά ισοδύναμοι μεταξύ τους. Επίσης οι συνοδευούσες μορφές που παράγονται από το θεώρημα 80 είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι με τον πολυωνυμικό πίνακα $T(s)$. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι τα μέλη της οικογένειας αυτής δεν μπορούν γενικά να παραχθούν με απλές μεταθέσεις γραμμών ή στηλών από την πρώτη ή την δεύτερη συνοδευούσα μορφή, κάτι που ισχύει ακόμα και για την βαθμωτή περίπτωση (βλέπε [Fie03]).

Παρατηρώντας την ασυμμετρία που υπάρχει στους όρους όσον αφορά την κατανομή των A_i στον σταθερό και τον πρώτου βαθμού όρο του $Q(s)$, είναι

¹Για την ακρίβεια ισχύει $\ker A_0^\top \cap \ker B^\top = \{0\}$, όταν ο B είναι οποιοδήποτε από τα γινόμενα των A_i για $1 < i \leq n$

φυσικό να περιμένουμε να παράγονται κάποιες επιπλέον συνοδευούσες μορφές. Υπό αυτή την οπτική γωνία, το επόμενο πόρισμα είναι μια βελτίωση του θεωρήματος 80.

Πόρισμα 81 Έστω $P(s)$ η πρώτη συνοδευούσα μορφή ενός κανονικού πολυωνυμικού πίνακα $T(s)$. Για καθένα από τα τέσσερα διατεταγμένα σύνολα δεικτών $I_k = (i_{k,1}, i_{k,2}, \dots, i_{k,n_k}), k = 1, 2, 3, 4$ τέτοια ώστε $I_i \cap I_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και $\bigcup_{k=1}^4 I_k = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$R(s) = sA_{I_1}^{-1}A_0A_{I_2}^{-1} - A_{I_3}A_nA_{I_4}$$

είναι ανστηρά ισοδύναμος με το $P(s)$, όπου $A_{I_k} = A_{i_{k,1}}A_{i_{k,2}}\dots A_{i_{k,n_k}}$ όταν $I_k \neq \emptyset$ και $A_{I_k} = I$ όταν $I_k = \emptyset$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι οι A_{I_k} είναι αντιστρέψιμοι σαν γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων A_i με $0 < i < n$. Τότε ο πίνακας $R(s)$ γράφεται

$$R(s) = A_{I_1}^{-1}(sA_0 - A_{I_1}A_{I_3}A_nA_{I_4}A_{I_2})A_{I_2}^{-1}.$$

Προφανώς ο πρωτοβάθμιος πίνακας $sA_0 - A_{I_1}A_{I_3}A_nA_{I_4}A_{I_2}$ ανήκει στην οικογένεια των συνοδευουσών μορφών $Q(s)$ του θεωρήματος 80 που είναι ανστηρά ισοδύναμα με το $P(s)$. Άρα

$$R(s) = A_{I_1}^{-1}Q(s)A_{I_2}^{-1}$$

που αποδεικνύει το θεώρημά μας. ■

Παρατηρούμε ότι οι αντίστροφοι των πινάκων $A_k, k = 1, 2, \dots, n-1$ έχουν σχετικά απλή μορφή, η οποία είναι

$$A_k^{-1} = \begin{bmatrix} I_{p(k-1)} & 0 & \cdots \\ 0 & C_k^{-1} & \ddots \\ \vdots & \ddots & I_{p(n-k-1)} \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots, n-1$$

όπου

$$C_k^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_p & T_k \end{bmatrix}.$$

Βλέποντας αυτή τον απλό τύπο αντιστροφής, το πόρισμα 81 παράγει μια μεγαλύτερη κλάση συνοδευόντων πινάκων από αυτή του θεωρήματος 80, που είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι με τον πολυωνυμικό πίνακα $T(s)$. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι "μεσαίοι" συντελεστές του $T(s)$ μπορούν να εμφανιστούν είτε στο σταθερό είτε στο πρωτοβάθμιο όρο του συνοδευόντα πίνακα $R(s)$.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει μια τέτοια περίπτωση.

Παράδειγμα 82 Έστω $T(s) = T_0s^3 + T_1s^2 + T_2s + T_3$. Μπορούμε να διαλέξουμε να μετακινήσουμε τους συντελεστές T_1, T_2 σε οποιονδήποτε από τους όρους του συνοδευόντα πίνακα $R(s)$. Για παράδειγμα μπορούμε να έχουμε το T_1 στο πρωτοβάθμιο όρο και τον T_2 στο σταθερό όρο του $R(s)$, δηλαδή

$$R(s) = sA_0A_1^{-1} - A_2A_3$$

ή

$$R(s) = s \begin{bmatrix} 0 & T_0 & 0 \\ I & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -T_2 & -T_3 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}.$$

6.3 Γραμμικοποιήσεις Ερμητιανών πολυωνυμικών πινάκων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με Ερμητιανούς πολυωνυμικούς πίνακες της μορφής (6.1). Ένας πολυωνυμικός πίνακας $T(s)$ θα λέγεται Ερμητιανός αν-ν $T^*(s) = T(s)$, δηλαδή αν ισχύει $T_i^* = T_i$ (βλέπε [GLR80], [GLR82]). Επιπλέον θα υποθέσουμε ότι ο πίνακας συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $T(s)$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή ότι ισχύει $\det(T_0) \neq 0$.

Οι Ερμητιανοί πολυωνυμικοί πίνακες παίζουν σημαντικό ρόλο στην μελέτη των συστημάτων ταλαντώσεων με απόσβεση (damped oscillatory systems) με πεπερασμένο βαθμό ελευθερίας, που μπορούν να περιγραφθούν από δευτέρου βαθμού διαφορικές εξισώσεις με Ερμητιανούς συντελεστές. Η αλγεβρική δομή τέτοιων συστημάτων και οι αντίστοιχοι πολυωνυμικοί πίνακες μελετήθηκαν από πολλούς συγγραφείς και η σχετική με το θέμα βιβλιογραφία εί-

ναι πολύ πλούσια (πχ. βλέπε [GLR80], [GLR82], [RR94], [TM01] και τις αναφορές τους).

Μια ερώτηση είναι αν υπάρχουν γραμμικοποιήσεις ενός Ερμητιανού πολυωνυμικού πίνακα που να είναι και αυτές Ερμητιανές. Αν και αυτή η ιδιότητα φαίνεται να είναι πολύ χρήσιμη στις γραμμικοποιήσεις Ερμητιανών πολυωνυμικών πινάκων (βλέπε [TM01]) και παρόλο που η δομή των Ερμητιανών πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων έχει μελετηθεί εκτενώς στις [KL98], [MMX00], [Tho91], η παραπάνω ερώτηση δεν συζητήθηκε στο γενικό πλαίσιο των Ερμητιανών πολυωνυμικών πινάκων. Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη μιας νέας οικογένειας συνοδευουσών μορφών, θα αποδείξουμε παρακάτω την ύπαρξη ενός συγκεκριμένου μέλους της οικογένειας αυτής που έχει αυτή την ιδιότητα.

Θεώρημα 83 Έστω $T(s)$ ένας Ερμητιανός πολυωνυμικός πίνακας βαθμού n , με $\det T_0 \neq 0$. Τότε η συνοδεύουσα μορφή του $T(s)$

$$R_s(s) = \begin{cases} sA_{odd}^{-1} - A_{even} & \text{για } n \text{ ζυγό} \\ sA_{even}^{-1} - A_{odd} & \text{για } n \text{ περιττό} \end{cases} \quad (6.15)$$

όπου $A_{even} = A_0^{-1}A_2A_4A_6\dots$, $A_{odd} = A_1A_3A_5\dots$, είναι ένας Ερμητιανός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι πίνακες A_{2k} (αντίστοιχα A_{2k+1}) στο γινόμενο A_{even} (αντίστοιχα A_{odd}) για $k = 0, 1, 2, \dots$ αντιμετωπίζονται και άρα η σειρά των δεικτών στο A_{even} (αντίστοιχα A_{odd}) δεν είναι σημαντική.

Για n ζυγό εφαρμόζοντας το πόρισμα 81 για τα διατεταγμένα σύνολα των δεικτών

$$I_1 = \emptyset, I_2 = (1, 3, \dots, n-1), I_3 = (2, 4, \dots, n-2), I_4 = \emptyset,$$

παίρνουμε τον συνοδευών πρωτοβάθμιο πίνακα

$$R(s) = sA_0A_{odd}^{-1} - A_{I_3}A_n.$$

Εφόσον ο T_0 είναι αντιστρέψιμος και ο A_{even} γράφεται σαν $A_{even} = A_0^{-1}A_{I_3}A_n$, ισχύει ότι $R_s(s) = A_0^{-1}R(s)$. Άρα ο $R_s(s)$ είναι κι αυτός μια συνοδεύουσα

μορφή του $T(s)$.

Παρόμοια για n περιπτώ, διαλέγουμε

$$I_1 = (2, 4, \dots, n-1), I_2 = \emptyset, I_3 = (1, 3, \dots, n-2), I_4 = \emptyset$$

και παίρνουμε την αντίστοιχη μορφή του $R_s(s)$.

Έχοντας υπ' όψιν μας ότι $T_i^* = T_i$ και ότι $A_i^* = A_i$ για $i = 0, 1, 2, \dots, n$, είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$A_{odd}^* = \dots A_5^* A_3^* A_1^* = \dots A_5 A_3 A_1 = A_1 A_3 A_5 \dots = A_{odd}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $A_i A_j = A_j A_i$ για $|i - j| > 1$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$A_{even}^* = A_{even}.$$

Άρα $R_s^*(s) = R_s(s)$, κάτι που αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Η Ερμιτιανή γραμμικοποίηση του $T(s)$ έχει μια απλή μορφή όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 84 Παρουσιάζεται η μορφή του $R_s(s)$ για $n = 4$ και $n = 5$ αντίστοιχα.

Για $n = 4$

$$R_s(s) = s \begin{bmatrix} 0 & I_p & & \\ I_p & T_1 & & \\ & & 0 & I_p \\ & & I_p & T_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_0^{-1} & & & \\ & -T_2 & I_p & \\ & I_p & 0 & \\ & & & -T_4 \end{bmatrix}$$

Για $n = 5$

$$R_s(s) = s \begin{bmatrix} T_0 & & & & \\ & 0 & I_p & & \\ & I_p & T_2 & & \\ & & & 0 & I_p \\ & & & I_p & T_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -T_1 & I_p & & & \\ I_p & 0 & & & \\ & & -T_3 & I_p & \\ & & I_p & 0 & \\ & & & & -T_5 \end{bmatrix}$$

Για να διερευνήσουμε την φασματική δομή του $R_s(s)$ χρειαζόμαστε να εισάγουμε επιπλέον συμβολισμό από το κεφάλαιο 5 της [GLR82]. Έστω $A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ ένας σταθερός τετράγωνος πίνακας με μιγαδικά στοιχεία. Διαλέγουμε το σύνολο των ιδιοτιμών $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_a\}$ που δεν περιέχει συζυγή ζεύγη ιδιοτιμών και έστω $\{\lambda_{a+1}, \lambda_{a+2}, \dots, \lambda_b\}$ οι διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές του A . Έστω $\lambda_{a+b+j} = \bar{\lambda}_j$, $j = 1, 2, \dots, a$ και

$$J = \text{diag}[J_i]_{i=1}^{2a+b}$$

όπου $J_i = \text{diag}[J_{ij}]_{j=1}^{k_i}$ είναι η Jordan μορφή που αντιστοιχεί στην λ_i και τα J_{ij} με διαστάσεις $a_{i1} \geq \dots \geq a_{i,k_i}$ αντίστοιχα. Ορίζουμε τον πίνακα

$$P_{\varepsilon, J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_c \\ 0 & P_r & 0 \\ P_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

όπου $P_c = \text{diag}[\text{diag}[P_{ij}]_{j=1}^{k_i}]_{i=1}^a$, $P_r = \text{diag}[\text{diag}[\varepsilon_{ij} P_{ij}]_{j=1}^{k_i}]_{i=a+1}^{a+b}$ και οι P_{st} είναι standard involuntary permutation (sip) πίνακες διαστάσεων $a_{st} \times a_{st}$ και $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ είναι το διατεταγμένο σύνολο προσήμων για $i = a+1, \dots, a+b$, $j = 1, \dots, k_i$ και $\varepsilon_{ij} = \pm 1$.

Πόρισμα 85 Έστω $T(s)$ ένας Ερμητιανός πολυωνυμικός πίνακας βαθμού n , με $\det T_0 \neq 0$. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας X τέτοιος ώστε

$$R_s(s) = X P_{\varepsilon, J} (sI - J) X^* \quad (6.17)$$

όπου $R_s(s)$ είναι μια Ερμητιανή γραμμικοποίηση του $T(s)$ όπως ορίστηκε στην (6.15), J είναι η Jordan κανονική μορφή του $A_{\text{odd}} A_{\text{even}}$ για n ζυγός (αντίστοιχα $A_{\text{even}} A_{\text{odd}}$ για n περιττός) με δομή όπως ορίστηκε πριν και $P_{\varepsilon, J}$ ο αντίστοιχος πίνακας της (6.16) για κάποιο διατεταγμένο σύνολο προσήμων ε .

Απόδειξη. Το θεώρημα αποδεικνύεται με απλή εφαρμογή του πορίσματος του κεφαλαίου 5.3, σελ. 378 στο [GLR82]. ■

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τον $T(s)$.

Πόρισμα 86 Έστω $T(s)$ ένας Ερμητιανός πολυωνυμικός πίνακας βαθμού n , με $\det T_0 \neq 0$ και $R_s(s)$ η συνοδευούσα μορφή του πίνακα όπως περιγράφηκε στο θεώρημα 83. Τότε ο $T(s)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής

$$T(s) = U(s)P_{\varepsilon,J}(sI - J)U^*(s) \quad (6.18)$$

όπου $U(s)$ είναι αριστερά αντιστρέψιμος πολυωνυμικός πίνακας και $J, P_{\varepsilon,J}$ όπως ορίστηκαν στο πόρισμα 85.

Απόδειξη. Έστω $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ορίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $U_n(s)$.

$$U_n(s) = \begin{cases} \begin{bmatrix} s^k & Q_1 & s^{k-1} & Q_2 & \dots & s & Q_k & 1 \end{bmatrix}, n \text{ odd} \\ \begin{bmatrix} T_0 s^k & U_{n-1} \end{bmatrix}, n \text{ even} \end{cases}$$

όπου

$$Q_i = \sum_{j=0}^{2i-1} T_j s^{k+i-j}, i = 1, \dots, k.$$

Τότε κάνοντας απλές πράξεις συμπεραίνουμε ότι

$$U_n(s)R_s(s)U_n^*(s) = T(s). \quad (6.19)$$

Θέτοντας $U(s) = U_n X$, όπου X όπως στην (6.17), αποδεικνύεται η ισχύς της σχέσης (6.18). ■

Παράδειγμα 87 Θεωρούμε τον Ερμητιανό πολυωνυμικό πίνακα (βλέπε παράδειγμα 10.4 στο [GLR82])

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^4 + 1 & 2s^2 \\ 2s^2 & s^4 + 1 \end{bmatrix}.$$

Η Ερμητιανή γραμμικοποίηση του $T(s)$ δίνεται από την

$$R_s(s) = s \begin{bmatrix} 0 & I_2 & & & \\ I_2 & 0 & & & \\ & & 0 & I_2 & \\ & & I_2 & 0 & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & & & & \\ & -2S & I_2 & & \\ & & I_2 & 0 & \\ & & & & -I_2 \end{bmatrix}$$

όπου $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Τότε

$$R_s(s) = XP_{\varepsilon,J}(sI - J)X^*$$

όπου

$$X = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & -2 & -1 & -2 & -1 & 2 & i & -2 \\ -i & -2 & 1 & 2 & 1 & -2 & i & -2 \\ -3 & 2i & -3 & -2 & 3 & -2 & -3 & -2i \\ -3 & 2i & 3 & 2 & -3 & 2 & -3 & -2i \\ -1 & -2i & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 2i \\ -1 & -2i & -1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2i \\ 3i & -2 & -3 & 2 & -3 & -2 & -3i & -2 \\ 3i & -2 & 3 & -2 & 3 & 2 & -3i & -2 \end{bmatrix},$$

$$P_{\varepsilon,J} = \begin{bmatrix} & & & S \\ & S & 0 & \\ & 0 & S & \\ S & & & \end{bmatrix}$$

και

$$J = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \right\}$$

είναι η Jordan κανονική μορφή του $A_{\text{odd}}A_{\text{even}}$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (6.19), υπολογίζουμε το

$$U_4(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 & s & 0 & s^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 & s & 0 & s^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

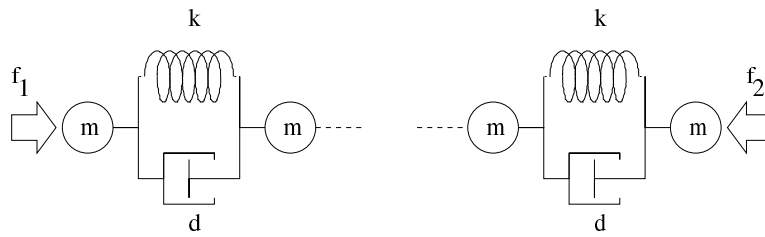
και από το πόρισμα 86 παίρνουμε την παραγοντοποίηση

$$T(s) = U(s)P_{\varepsilon,J}(sI - J)U^*(s)$$

όπου $U(s) = U_4(s)X$.

Πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία αυτομάτου ελέγχου παίζουν τα μοντέλα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης της μορφής

$$\begin{aligned} M\ddot{z} + L\dot{z} + Kz &= Du \\ y &= Nz + P\dot{z} \end{aligned} \tag{6.20}$$



Σχήμα 6.1: Σύστημα ελατηρίων - μαζών - εξασθενητήρων κίνησης

όπου $z \in \mathbb{R}^n$, $M, L, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $N, P \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Συχνά ο M είναι συμμετρικός πίνακας και θετικά ορισμένος, ο K συμμετρικός πίνακας και θετικά ημιορισμένος. Τέτοια συστήματα χρησιμοποιούνται στην μοντελοποίηση μηχανικών συστημάτων όπως γέφυρες, κλπ.

Παράδειγμα 88 Έστω ένα σύστημα ελατηρίων-μαζών-εξασθενητήρων κίνησης. Το σύστημα αποτελείται από $n-1$ ελατήρια με συντελεστές σκληρότητας k_i , $i = 1, \dots, n$, n σώματα μάζας m_i , $i = 1, \dots, n$ και $(n-1)$ εξασθενητήρες κίνησης με συντελεστή απόσβεσης d_i , $i = 1, \dots, n$. Θεωρούμε ότι ο έλεγχος ασκείται από δύο δυνάμεις που δρουν η μία στο δεξιό άκρο του συστήματος και η άλλη στο αριστερό άκρο. Σαν είσοδο στο σύστημα θεωρούμε αυτές τις δύο δυνάμεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$. Αν θεωρήσουμε $n = 5$, $m_i = m$, $i = 1, \dots, n$, $d_i = d$, $i = 1, \dots, n$, $k_i = k$, $i = 1, \dots, n$ (βλέπε σχήμα), τότε το σύστημα περιγράφεται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής (6.20), όπου

$$M = mI_5$$

$$L = dI_5$$

$$N = P = I_5$$

$$K = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στην συνέχεια, μας αφορά ο πολυωνυμικός πίνακας $T(s) = Ms^2 + Ls + K$. Οι γραμμικοποιήσεις του πίνακα αυτού, αντιστοιχούν σε μετασχηματισμού της κατάστασης του συστήματος (6.20). Σύμφωνα με αυτά που έχουμε λίγο πιο πάνω, μια ερμητιανή συνοδευούσά του είναι η $R_s(s) = sA_1^{-1} - A_0^{-1}A_2$ με

$$\begin{aligned} A_0 &= \text{diag}\{M, I_5\} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} -L & I_5 \\ I_5 & 0 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \text{diag}\{I_5, -K\} \end{aligned}$$

Άρα έχω

$$R_s(s) = sE_s - A_s$$

όπου

$$E_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

και

$$A_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & -2k & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & -2k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & -2k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πρωτοβάθμιος πίνακας είναι κι αυτός Ερμητιανός. Ο $R_s(s)$ συνδέεται με τον $T(s)$ με μια σχέση στοιχειώδους ισοδυναμίας. Θεωρούμε τους πίνακες

$$M(s) = \begin{bmatrix} mI_5 & I_5 \end{bmatrix}$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} \\ I_5 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} M(s) & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_s(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (6.21)$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση στοιχειώδους ισοδυναμίας, μια και εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι οι block πίνακες δεν έχουν πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνηθισμένη γραμμικοποίηση του πολυωνυμικού

πίνακα που χρησιμοποιείται, είναι ο πρωτοβάθμιος πίνακας

$$sI_{10} - \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}L & -M^{-1}K \end{bmatrix} =$$

$$= sI_{10} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{m} & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{m} & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{m} & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{m} & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι κατά την παραπάνω γραμμικοποίηση η ερμητιανή ιδιότητα του πολυωνυμικού πίνακα χάθηκε.

6.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια νέα οικογένεια συνοδευουσών μορφών κανονικών πολυωνυμικών πινάκων. Κίνητρο για την μελέτη αυτή ήταν τα αποτελέσματα της [Fie03] για την βαθμωτή περίπτωση. Τα μέλη της προτεινόμενης νέας οικογένειας συνοδευουσών μορφών είναι στοιχειωδώς ισοδύναμα με τον πολυωνυμικό πίνακα και έτσι διατηρούν ταυτόχρονα την πεπερασμένη και άπειρη δομή των στοιχειωδών διαιρετών. Οι νέες συνοδεύουσες μορφές παραμετροποιούνται σαν γινόμενα απλών σταθερών πινάκων και οι γνωστές πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσες μορφές αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες μεταθέσεις αυτών των γινομένων.

Μια συγκεκριμένη συνοδεύουσα μορφή που ανήκει σε αυτή την οικογένεια φαίνεται να είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, μια και στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας είναι Ερμητιανός, αυτή η γραμμικοποίησή του είναι Ερμητιανή επίσης. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας ένα γνωστό αποτέλεσμα

για τους Ερμητιανούς πολυωνυμικούς πίνακες, παρουσιάσαμε μια νέα παραγοντοποίηση του πολυωνυμικού πίνακα.

Τα αποτελέσματα που αποδείχθηκαν σε αυτή τη μελέτη, θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν σαν εισαγωγικά, αφήνοντας πολλά ενδιαφέροντα θεωρητικά και υπολογιστικά προβλήματα για περαιτέρω έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Συμπεράσματα

Το ερευνητικό ενδιαφέρον στην περιοχή της ανάλυσης και σύνθεσης πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου βάσει προτύπων συστημάτων (βλέπε Baras [Bar91]) τα οποία είναι γνωστά στην βιβλιογραφία σαν "Πολυωνυμικές Περιγραφές Συστημάτων (Π.Π.Σ.)" (Polynomial Matrix Descriptions) (PMDs) ξεκίνησε προ 25ετίας στο University of Manchester Institute of Science and Technology (UMIST) από τον ιδρυτή-διευθυντή του Control Systems Centre του UMIST Prof. Rosenbrock, FRS και τους συνεργάτες του. Ο Rosenbrock σε μία σειρά πρωτοποριακών για την εποχή θεωρητικών αποτελεσμάτων τα οποία εμφανίστηκαν σε ένα αριθμό δημοσιεύσεων και στα βιβλία του [Ros70] έθεσε τις βάσεις της θεώρησης προβλημάτων ανάλυσης και σύνθεσης πολυμεταβλητών συστημάτων ελέγχου μέσω πολυωνυμικών πινάκων (Polynomial Matrix Approach) γενικεύοντας την μέχρι τότε επικρατούσα στις Η.Π.Α., κυρίως μέσω των εργασιών του R.E. Kalman, Θεωρία του Χώρου των Καταστάσεων (State Space Theory). Σημαντικά θεωρητικά αποτελέσματα τα οποία επέκτειναν και συμπλήρωσαν την πολυωνυμική θεωρία του Rosenbrock δημοσίευσε μεταγενέστερα ο Wolovich (1974) και οι μαθητές του, αργότερα ο Kailath (1980) και οι μαθητές του, ο Verghese (1978), ο Kucera (1979), οι Blomberg H. και Ylinen (1983), ο Vidyasagar (1985), κ.α. Κατά την παρελθούσα εικοσαετία, η "πολυωνυμική περιγραφή πολυμεταβλητών συστημάτων" ή όπως είναι αλλιώς γνωστή η αλγεβρική προσέγγιση, επικράτησε σαν μία ερευνητική περιοχή με έντονη δραστηριότητα.

Σε γενικές γραμμές η πολυωνυμική προσέγγιση αποδεικνύει την ισοδυναμία ανάμεσα στην λύση προβλημάτων αυτομάτου ελέγχου και την λύση προβλημάτων με πολυωνυμικούς πίνακες ή και ρητούς πίνακες. Τα πολώνυμα και οι πολυωνυμικοί πίνακες παίζουν πρωταρχικό ρόλο στην πολυωνυμική προσέγγιση του αυτομάτου ελέγχου και εμφανίζονται πολύ συχνά σε πολλά προβλήματα. Πολυωνυμικοί πίνακες περιγράφουν συνεχή ή και διακριτά γραμμικά πολυμεταβλητά συστήματα. Είναι χρήσιμοι σε προβλήματα ανάλυσης συστημάτων. Η λύση στο πεδίο των συχνοτήτων προβλημάτων αυτομάτου ελέγχου, όπως η σταθεροποίηση με ανάδραση, ο \mathcal{H}_2 βέλτιστος έλεγχος, ο \mathcal{H}_∞ βέλτιστος έλεγχος, η εύρωστη επανατοποθέτηση πόλων, προϋποθέτουν τον χειρισμό πολυωνυμικών πινάκων. Επίσης, ιδιότητες των πολυωνυμικών πινάκων όπως οι πεπερασμένοι και άπειροι διαιρέτες, τα μηδενικά και οι πόλοι, οι ελάχιστοι δείκτες κλπ συνδέονται στενά με τις φυσικές ιδιότητες των συστημάτων τα οποία περιγράφουν.

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, νέα και σημαντικά αποτελέσματα στην αριθμητική γραμμική άλγεβρα καθώς και η συνεχώς αυξανόμενη υπολογιστική ισχύς των υπολογιστών, έδωσαν σημαντική βοήθεια στους ερευνητές που ακολούθησαν την Θεωρία του Χώρου των Καταστάσεων. Αντίστοιχες προσπάθειες για την εύρεση αριθμητικά ευσταθών μεθόδων για τον χειρισμό πολυωνυμικών πινάκων, έγιναν και συνεχίζονται και γίνονται από πολλούς ερευνητές και ερευνητικά τμήματα.

Στόχοι της παρούσας διατριβής είναι να αντιμετωπίσει βασικά θεωρητικά προβλήματα της πολυωνυμικής θεώρησης του αυτομάτου ελέγχου, αλλά και η ανάπτυξη υπολογιστικών μεθόδων για πράξεις πολυωνυμικών πινάκων μιας ή και περισσότερων μεταβλητών.

Πιο συγκεκριμένα στα κεφάλαια 2 και 3 παρουσιάστηκαν δύο νέοι αλγόριθμοι για την εύρεση των Moore-Penrose και Drazin γενικευμένων αντιστρώφων, μερικές εφαρμογές των οποίων είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς, η μελέτη των αντιστρώφων συστημάτων, η εύρεση λύσεων συστημάτων, η λύση διοφαντικών εξισώσεων που με την σειρά τους απαντούν σε ερωτήματα όπως η εύρεση σταθεροποιητών κλπ. Οι αλγόριθμοι αυτοί βασίστηκαν στον γρήγορο μετασχηματισμό Fourier (*FFT*) και σε τεχνικές υπολογισμού παρεμβολής. Αντικείμενο μετέπειτα έρευνας θα μπορούσε να είναι

η εφαρμογή παρόμοιων αλγορίθμων στον υπολογισμό άλλων γενικευμένων αντιστρόφων όπως οι $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ και $\{1, 2, 4\}$. Επίσης μια συστηματική μελέτη και σύγκριση των αλγορίθμων που έχουν να κάνουν με πολυωνυμικούς πίνακες ως προς την ταχύτητα και την ευρωστία τους είναι αναγκαία.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάστηκε ένας νέος αλγόριθμος για το γρήγορο και αριθμητικά ευσταθή υπολογισμό ελάχιστων πολυωνυμικών βάσεων πολυωνυμικών πινάκων. Ο αλγόριθμος χρησιμοποίησε την δομή του πυρήνα διαδοχικών Sylvester ή Wolovich γενικευμένων απαλειφουσών. Οι εφαρμογές αυτού του αλγόριθμου στην θεωρία ελέγχου εκτείνονται από το πρόβλημα της επανατοποθέτησης των ιδιοτιμών του παρονομαστή ([ZC83], [CD91], [Kuc79], [AV04a]) και της εύρεσης μιας ελάχιστης πραγμάτωσης ([Wol74], [Var91], [VK95]) ενός συστήματος με πολλές εισόδους και εξόδους, ως και το πρόβλημα της αναγωγής ενός πολυωνυμικού πίνακα σε κανονικό πολυωνυμικό πίνακα κατά γραμμές / στήλες. Περαιτέρω έρευνα θα μπορούσε να γίνει εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο που περιγράφηκε σε πιο συγκεκριμένα προβλήματα όπως στον υπολογισμό row / column reduced πολυωνυμικών πινάκων, χρησιμοποιώντας μεθόδους παρόμοιες με την [BvdHP88] (ή τον βελτιωμένο αλγόριθμο της [NP93]), ή στον υπολογισμό της τάξης, των ελάχιστων δεικτών ή και του μέγιστου κοινού διαιρέτη πολυωνυμικών πινάκων.

Οι πεπερασμένοι και άπειροι στοιχειώδεις διαιρέτες ενός πολυωνυμικού πίνακα παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση ομογενών διακριτών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου όταν αυτά μελετούνται σε πεπερασμένο διάστημα. Ο ορισμός μιας ισοδυναμίας μεταξύ τέτοιων συστημάτων προϋποθέτει τον ορισμό μιας ισοδυναμίας πολυωνυμικών πινάκων που θα διατηρεί αναλλοίωτη την πεπερασμένη και άπειρη δομή στοιχειωδών διαιρέτων. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάστηκε μια καινούρια ισοδυναμία (στοιχειώδης ισοδυναμία) μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων, που διατηρεί αναλλοίωτους τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες, γενικεύοντας έτσι πλήρως την αυστηρή ισοδυναμία πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων [Gan59]. Αποδείχθηκε ότι η στοιχειώδης ισοδυναμία συνδέεται άμεσα με την θεμελιώδη ισοδυναμία AR συστημάτων. Μερικά από τα προβλήματα που θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο περαιτέρω έρευνας είναι η πλήρης γενίκευση της στοιχειώδους ισοδυναμίας για μη τετράγωνους πολυωνυμικούς πίνακες και η

χρήση της ως βάση για μια ισοδυναμία μη ομογενών *ARMA* συστημάτων.

Ο Fiedler το 2003 στην [Fie03], απέδειξε την ύπαρξη μιας οικογένειας συνοδευουσών μορφών πολυωνύμων, δίνοντας έτσι μια νέα οπτική στην θεωρία των συνοδευουσών. Στο κεφάλαιο 6, γενικεύοντας πλήρως τα αποτελέσματα της [Fie03] στην περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων, προτάθηκε μια νέα οικογένεια συνοδευουσών μορφών κανονικών πολυωνυμικών πινάκων. Τα μέλη της νέας οικογένειας συνοδευουσών μορφών είναι στοιχειωδώς ισοδύναμα με τον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα και έτσι διατηρούν ταυτόχρονα την πεπερασμένη και άπειρη δομή των στοιχειωδών διαιρετών. Οι νέες συνοδευουσες μορφές παραμετροποιούνται σαν γινόμενα απλών σταθερών πινάκων και αποδεικνύεται ότι κάποιες από αυτές έχουν μερικές πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες για την ανάλυση πολυωνυμικών συστημάτων με Ερμητιανούς συντελεστές. Σαν συνέχεια της εργασίας που παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο θα μπορούσε να αποτελέσει μια συστηματική μελέτη όλων των μελών αυτής της οικογένειας συνοδευουσών μορφών ως προς τις υπολογιστικές ιδιότητές τους και την χρήση τους στην μελέτη συστημάτων που περιγράφονται από πολυωνυμικούς πίνακες με συμμετρίες. Μια πρώτη προσπάθεια σε αυτή την κατεύθυνση έγινε από τους Antoniou και Vologianidis στην [AV05].

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

- παρεμβολή πολυωνύμων, 27
Cayley-Hamilton θεώρημα, 3
Drazin γενικευμένος αντίστροφος πολυωνυμικών πινάκων πολλών μεταβλητών, 55
Drazin γενικευμένος αντίστροφος, 22
Forney invariant ελάχιστη τάξη, 82
Fourier σημεία, 31
Fourier διακριτός μετασχηματισμός, 31, 57
Fourier ζεύγος, 31
Jordan μορφή, 4
Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος πολυωνυμικών πινάκων πολλών μεταβλητών, 54
Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος, 21
απεικόνιση γραμμική, 1
αριστεροί ελάχιστοι δείκτες, 15
αυτοπαλλίνδρομη αναπαράσταση, 115
γενικευμένη απαλείφουσα του Sylvester, 16
γενικευμένη απαλείφουσα του Wolovich, 16
δεξιοί ελάχιστοι δείκτες, 15
διακριτό θεώρημα συνέλιξης, 33
ελάχιστη πολυωνυμική βάση, 15
επιμορφισμός, 2
θεμελιώδης ισοδυναμία AR συστημάτων, 118
ιδιοάνυσμα, 2
ιδιοτιμή, 2
ισοδυναμίες πολυωνυμικών πινάκων
αυστηρή ισοδυναμία, 11
γενικευμένα αντιστρέψιμη, 10
μονομετρική, 7
0-ισοδυναμία, 11
αυστηρή ισοδυναμία κατά [VA03], 117
divisor, 96
ισοδυναμίες πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων
αυστηρή ισοδυναμία, 17
ισοδυναμίες ρητών πινάκων
μονομετρική στο άπειρο, 13
μονομετρική, 12
ισομορφισμός, 2
μονομορφισμός, 2
ομοιότητα πινάκων, 2
πίνακας
βαθμίδα, 2
τάξη, 2
πολυωνυμικός πίνακας
Ερμητιανός, 128

- άπειρο ιδιοζεύγος, 9
 αντιστρέψιμος, 4
 αριστερά/δεξιά αντιστρέψιμος, 5
 βαθμός, 4
 δυϊκός, 9
 ιδιάζων, 4
 κανονικός κατά γραμμές, 6
 κανονικός κατά στήλες, 6
 κανονικός, 4
 μηδενικά, 8
 μονομετρικός, 4
 πεπερασμένο ιδιοζεύγος, 8
 πεπερασμένο φασματικό ζεύγος,
 8
 πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαρέ-
 τες, 8
 στοιχειώδεις διαρέτες στο άπειρο,
 9
 Drazin γενικευμένος αντίστροφος,
 23
 Moore-Penrose γενικευμένος αντι-
 στροφος, 21
 Smith μορφή, 7
 πολυωνυμικός πίνακας, 4
 πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας
 Kronecker μορφή, 18
 Weierstrass μορφή, 19
 ρητοί πίνακες, 11
 ρητός πίνακας
 αυστηρά κανονικός, 13
 δικανονικός, 13
 κανονικός, 13
 πεπερασμένα μηδενικά, 12
 πεπερασμένοι πόλοι, 12
 στοιχειώδεις διαρέτες στο άπειρο,
 14
 Smith-McMillan μορφή στο άπειρο,
 14
 Smith-McMillan μορφή στο C, 12
 συνοδεύουσα μορφή, 121
 χαρακτηριστικό πολυώνυμο, 2

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [Μπο84] Σ.Μ. Μποζαπαλίδης, *Γραμμική Άλγεβρα*, Θεσσαλονίκη, 1984.
- [Φρα90] Γ. Φραγκούλης, *Ανάλυση γενικευμένων ιδιόμορφων συστημάτων αυτομάτου ελέγχου*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, 1990.
- [BT01] Π.Χ.Γ. Βασιλείου and Γ. Τσακλίδης, *Εφαρμοσμένη θεωρία πινάκων*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2001.
- [AG93] Panos J. Antsaklis and Zhiqiang Gao, *Polynomial and rational matrix interpolation: theory and control applications*, *Internat. J. Control* **58** (1993), no. 2, 349–404. MR 95a:93018
- [AKI97] S. Antoniou, N. Karampetakis, and Vardulakis A. I., *A classification of the solution of non-regular, discrete time descriptor systems.*, 1997.
- [AV04a] E. N. Antoniou and A.I.G. Vardulakis, *On the computation and parametrization of proper denominator assigning compensators for strictly proper plants*, Accepted for publication in *IMA Journal of Control and its Information*, 2004.
- [AV04b] E. N. Antoniou and S. Vologianidis, *A new family of companion forms of polynomial matrices*, *Electron. J. Linear Algebra* **11** (2004), 78–87 (electronic).
- [AV05] E. Antoniou and S. Vologianidis, *Linearizations of polynomial matrices with symmetries and applications*, 2005.

- [AVK98] E. N. Antoniou, A. I. G. Vardulakis, and N. P. Karampetakis, *A spectral characterization of the behavior of discrete time AR-representations over a finite time interval*, *Kybernetika* (Prague) **34** (1998), no. 5, 555–564. MR 2000g:93064
- [AVV04] E. N. Antoniou, A. I. G. Vardulakis, and S. Vologiannidis, *On the computation of minimal polynomial bases*, 12th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'04) (Kusadasi, Turkey), June 2004.
- [Bar91] J. S. Baras, *Algebraic system theory, computer algebra and controller synthesis*, *Mathematical system theory*, Springer, Berlin, 1991, pp. 355–370. MR MR1296054 (95k:93023)
- [BH95] William L. Briggs and Van Emden Henson, *The DFT*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1995, An owner's manual for the discrete Fourier transform. MR 96c:65216
- [BIG74] Adi Ben-Israel and Thomas N. E. Greville, *Generalized inverses: theory and applications*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974, Pure and Applied Mathematics. MR 53 #469
- [BIG03] ———, *Generalized inverses*, second ed., CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 15, Springer-Verlag, New York, 2003, Theory and applications. MR 2004b:15008
- [Bje51a] A. Bjerhammar, *Application of calculus of matrices to method of least squares with special reference to geodetic calculations*, *Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm* **1951** (1951), no. 49, 86 pp. (2 plates). MR 14,1127f
- [Bje51b] ———, *Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations*, *Bull. Geodesique* (1951), 188–220.
- [Bje58] ———, *A generalized matrix algebra*, *Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm* **1958** (1958), no. 124, 32 pp.

- [BK97] J. C. Basilio and B. Kouvaritakis, *An algorithm for coprime matrix fraction description using Sylvester matrices*, Linear Algebra Appl. **266** (1997), 107–125. MR MR1473196 (98h:15058)
- [BKAK78] R.R. Bitmead, S.-Y. Kung, B.D.O. Anderson, and T. Kailath, *Greatest common divisors via generalized sylvester and bezout matrices.*, IEEE Trans. on Automatic Control **23** (1978), no. 6, 1043–1047.
- [BP94] Dario Bini and Victor Y. Pan, *Polynomial and matrix computations. Vol. 1*, Progress in Theoretical Computer Science, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 1994, Fundamental algorithms. MR 95k:65003
- [BV87] Th. G. L. Beelen and G. W. Veltkamp, *Numerical computation of a coprime factorization of a transfer function matrix*, Syst. Control Lett. **9** (1987), no. 4, 281–288.
- [BvdHP88] Th. G. J. Beelen, G. J. van den Hurk, and C. Praagman, *A new method for computing a column reduced polynomial matrix*, Systems Control Lett. **10** (1988), no. 4, 217–224. MR MR936618
- [Cam76] S. L. Campbell, *Optimal control of autonomous linear processes with singular matrices in the quadratic cost functional*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), no. 6, 1092–1106. MR 54 #12292
- [Cam77] ———, *Linear systems of differential equations with singular coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **8** (1977), no. 6, 1057–1066. MR 57 # 756
- [Cam80] ———, *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1980. MR 81g:34003
- [Cam82] S. L. Campbell (ed.), *Recent Applications of Generalized Inverses*, Boston, Mass., Pitman (Advanced Publishing Program), 1982. MR 83h:65010
- [CD91] Frank M. Callier and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, Springer Texts in Electrical Engineering, Springer-Verlag, New York, 1991. MR MR1123479 (92h:93003)

- [CT65] James W. Cooley and John W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comp. **19** (1965), 297–301. MR 31 #2843
- [Dav63] Philip J. Davis, *Interpolation and approximation*, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co. New York-Toronto-London, 1963. MR 28 #393
- [Dav75] ———, *Interpolation and approximation*, Dover Publications Inc., New York, 1975, Republication, with minor corrections, of the 1963 original, with a new preface and bibliography. MR 52 #1089
- [Dec65] H. P. Decell, Jr., *An application of the Cayley-Hamilton theorem to generalized matrix inversion*, SIAM Rev. **7** (1965), 526–528, (extended in [Wan87]). MR 33 #2656
- [DM84] D.E. Dudgeon and R.M. Mersereau, *Multidimensional digital signal processing*, Prentice Hall, 1984.
- [Dra58] M. P. Drazin, *Pseudo inverses in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly **65** (1958), 506–514.
- [FF63] D. K. Faddeev and V. N. Faddeeva, *Computational methods of linear algebra*, Translated by Robert C. Williams, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1963. MR 28 #1742
- [Fie03] Miroslav Fiedler, *A note on companion matrices*, Linear Algebra Appl. **372** (2003), 325–331. MR 1 999 154
- [FJ98] M. Frigo and S.G. Johnson, *Fftw: An adaptive software architecture for the fft*, ICASSP conference proceedings (vol. 3, pp. 1381-1384), 1998.
- [FMV91] G. Fragulis, B. G. Mertzios, and A. I. G. Vardulakis, *Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion*, Internat. J. Control **53** (1991), no. 2, 431–443. MR 92d:93060

- [For75] G. David Forney, Jr., *Minimal bases of rational vector spaces, with applications to multivariable linear systems*, SIAM J. Control **13** (1975), 493–520. MR MR0378886 (51 #15052)
- [Fre03] I. Fredholm, *Sur une classe d'equations fonctionnelles*, Acta Math. **27** (1903), 365–390.
- [Fuh01] P.A. Fuhrmann, *On behavior homomorphisms and system equivalence*, System and Control Letters **44** (2001), 127–134.
- [Fuh02] P. A. Fuhrmann, *A study of behaviors*, Linear Algebra and its Applications **351-352** (2002), 303–380.
- [Fuh03] ———, *A note on continuous behavior homomorphisms*, System and Control Letters **to appear** (2003).
- [Gan59] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices. Vols. 1, 2*, Translated by K. A. Hirsch, Chelsea Publishing Co., New York, 1959. MR 21 #6372c
- [GE94] M. Gu and S.C Eisenstat, *A stable and fast algorithm for updating the singular value decomposition*, Tech. report, YALEU/DCS/RR-966, Yale University, New Haven, CT., 1994.
- [GKBM01] T. Guyer, O. Klymaz, G. Bilgici, and S. Mirasyedioglu, *A new method for computing the solutions of differential equation systems using generalized inverse via Maple*, Appl. Math. Comput. **121** (2001), no. 2-3, 291–299. MR 1 830 875
- [GLR80] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, *Spectral analysis of selfadjoint matrix polynomials*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 1, 33–71. MR MR584074 (82c:15010)
- [GLR82] ———, *Matrix polynomials*, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1982, Computer Science and Applied Mathematics. MR 84c:15012

- [GVL96] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, *Matrix computations*, third ed., Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996. MR 97g:65006
- [HL81] R. E. Hartwig and J. Levine, *Applications of the Drazin inverse to the Hill cryptographic system. III*, *Cryptologia* **5** (1981), no. 2, 67–77. MR 82j:94022a
- [HP02] Petr Husek and Renata Pytelkova, *On polynomial and polynomial matrix interpolation*, *Proceedings of Computational Science*, vol. 2, Springer-Verlag, 2002, pp. 520–527.
- [HPF88] G. E. Hayton, A. C. Pugh, and P. Fretwell, *Infinite elementary divisors of a matrix polynomial and implications*, *Internat. J. Control* **47** (1988), no. 1, 53–64. MR 929 725
- [HSS99] Petr Husek, Michael Sebek, and Jan Stecha, *Numerical operations among rational matrices: standard techniques and interpolation*, *Kybernetika (Prague)* **35** (1999), no. 5, 587–598. MR 1 728 469
- [Hur12] W. A. Hurwitz, *On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **13** (1912), 405–418.
- [HWP90] G. E. Hayton, A. B. Walker, and A. C. Pugh, *Infinite frequency structure-preserving transformations for general polynomial system matrices*, *Internat. J. Control* **52** (1990), no. 1, 1–14. MR 91i:93024
- [Kai80] Thomas Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980, Prentice-Hall Information and System Sciences Series. MR MR569473 (82a:93001)
- [Kar94] Nicos Karcantias, *Minimal bases of matrix pencils: algebraic Toeplitz structure and geometric properties*, *Linear Algebra Appl.* **205/206** (1994), 831–868. MR MR1276843 (96c:15018)
- [Kar97] N. P. Karampetakis, *Computation of the generalized inverse of a polynomial matrix and applications*, *Linear Algebra and its Applications* **252** (1997), 35–60. MR 98c:65066

- [Kar02] N.P. Karampetakis, *On the determination of the dimension of the solution space of discrete time AR-representations.*, 15th IFAC World Congress, 2002, 15th IFAC World Congress.
- [KL98] Ilya Krupnik and Peter Lancaster, *Linearization, realization, and scalar products for regular matrix polynomials*, Linear Algebra Appl. **272** (1998), 45–57. MR MR1489379 (98k:15044)
- [KM02] Nicos Karcaniias and Marilena Mitrouli, *Minimal bases of matrix pencils and coprime matrix fraction descriptions*, IMA J. Math. Control Inform. **19** (2002), no. 3, 245–278. MR MR1923242 (2003g:93024)
- [KPV94] N. P. Karampetakis, A. C. Pugh, and A. I. Vardulakis, *Equivalence transformations of rational matrices and applications*, Internat. J. Control **59** (1994), no. 4, 1001–1020. MR 95c:93021
- [KS01] N. Karampetakis and P. Stanimirovic, *On the computation of the drazin inverse of a polynomial matrix*, 1st IFAC Symposium on Systems Structure and Control, Prague, Czech Republic, 2001.
- [Kuc79] Vladimir Kucera, *Discrete linear control*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1979, The polynomial equation approach, Translated from the Czech, A Wiley-Interscience Publication. MR MR573447 (82j:93023)
- [KV02a] N. Karampetakis and S. Vologianidis, *Dft calculation of the generalized and drazin inverse of a polynomial matrix*, Proceedings of the IEEE Conference on Computer Aided Control System Design CA-CSD02, Glasgow, Scotland, 2002, 2002.
- [KV02b] N. P. Karampetakis and S. Vologianidis, *Infinite elementary divisor structure-preserving transformations for polynomial matrices*, 8th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (Szczecin, Poland), September 2002.
- [KV03a] _____, *DFT calculation of the generalized and Drazin inverse of a polynomial matrix*, Appl. Math. Comput. **143** (2003), no. 2-3,

501–521. MR 1 981 711

- [KV03b] Nicholas P. Karampetakis and Stavros Vologiannidis, *Infinite elementary divisor structure-preserving transformations for polynomial matrices*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. **13** (2003), no. 4, 493–503. MR 2 021 478
- [KVV01] N. P. Karampetakis, S. Vologiannidis, and A. I. G. Vardulakis, *Notions of equivalence for discrete time AR-representations*, 15th IFAC World Congress (Barcelona, Spain), 2001.
- [KVV04] ———, *A new notion of equivalence for discrete time AR representations*, Internat. J. Control **77** (2004), 584–597.
- [Lew84] F.L. Lewis, *Descriptor systems : Decomposition into forward and backward subsystems*, IEEE Trans. Autom. Control **29** (1984), no. 2, 167–170.
- [Lew86] ———, *A survey of linear singular systems*, Circuit Systems and Signal Processing **5** (1986), no. 1, 3–36.
- [Lip76] John D. Lipson, *The fast fourier transform its role as an algebraic algorithm*, Proceedings of the annual conference of the ACM, 1976, pp. 436–441.
- [LM90] F.L. Lewis and B. G. Mertzios, *On the analysis of discrete linear time-invariant singular systems*, IEEE Trans. Autom. Control **35** (1990), no. 4, 506–511.
- [Lue77] D.G. Luenberger, *Dynamic equations in descriptor form*, IEEE Trans. Autom. Control **22** (1977), no. 3, 312–321.
- [Lue89] ———, *Boundary recursion for descriptor variable systems*, IEEE Trans. Autom. Control **34** (1989), no. 3, 287–292.
- [MB35] E. H. Moore and R. W. Barnard, *General Analysis*, Memoirs of the American Philosophical Society, I, American Philosophical Society, Philadelphia, Pennsylvania, 1935, (see specially Part 1, pp. 197–209).

- [Mer84] B. G. Mertzios, *Leverrier's algorithm for singular systems*, IEEE Trans. Automat. Control **29** (1984), no. 7, 652–653. MR 748 757
- [Mey75] C. D. Meyer, Jr., *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains*, SIAM Rev. **17** (1975), 443–464. MR 52 #4419
- [Mey82] ———, *Analysis of finite Markov chains by group inversion techniques*, in Campbell [Cam82], pp. 50–81. MR 84b:60090
- [MMX00] Christian Mehl, Volker Mehrmann, and Hongguo Xu, *Canonical forms for doubly structured matrices and pencils*, Electron. J. Linear Algebra **7** (2000), 112–151 (electronic). MR MR1781467 (2001i:15013)
- [Moo20] E. H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 394–395, (Abstract).
- [M.P97] Stuchlik-Quere M.P, *How to compute minimal bases using pade approximants*, Tech. report, Laboratoire d'Informatique de Paris, 1997.
- [NP93] W. H. L. Neven and C. Praagman, *Column reduction of polynomial matrices*, Linear Algebra Appl. **188/189** (1993), 569–589. MR MR1223472 (95a:15010)
- [NWL87] R. Nikoukhah, A. Wilski, and B.C. Levy, *Boundary-value descriptor systems : Well posedness, reachability and observability*, Int. J. Control **46** (1987), 1715–1737.
- [Pen55] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **51** (1955), 406–413.
- [PHF87] A. C. Pugh, G. E. Hayton, and P. Fretwell, *Transformations of matrix pencils and implications in linear systems theory*, Internat. J. Control **45** (1987), no. 2, 529–548. MR 88i:93016
- [Pra91] C. Praagman, *Invariants of polynomial matrices.*, 1st European Control Conference, 1991, pp. 1274–1277.

- [PS78] A. C. Pugh and A. K. Shelton, *On a new definition of strict system equivalence*, *Internat. J. Control* **27** (1978), no. 5, 657–672. MR 58 # 15401
- [Rei68] W. T. Reid, *Generalized inverses of differential and integral operators*, 1968, pp. 1–25.
- [Ros70] H. H. Rosenbrock, *State-space and multivariable theory*, John Wiley & Sons, Inc. [Wiley Interscience Division], New York, 1970. MR 48 #3550
- [RR94] A. C. M. Ran and L. Rodman, *Factorization of matrix polynomials with symmetries*, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **15** (1994), no. 3, 845–864. MR MR1282698 (95i:15021)
- [SK00] P. Stanimirovic and N. Karampetakis, *Symbolic implementation of leverrier-faddeev algorithm and applications.*, 8th IEEE Medit. Conference on Control and Automation, Patras, Greece., 2000.
- [Tho91] Robert C. Thompson, *Pencils of complex and real symmetric and skew matrices*, *Linear Algebra Appl.* **147** (1991), 323–371. MR 91k:15031
- [TI61] H. Takahasi and Y. Ishibashi, *A new method for 'exact calculation' by a digital computer*, *Inf. Processing in Japan* **1** (1961), 28–42.
- [TM01] Françoise Tisseur and Karl Meerbergen, *The quadratic eigenvalue problem*, *SIAM Rev.* **43** (2001), no. 2, 235–286 (electronic). MR MR1861082 (2002i:65042)
- [TP02] Liansheng Tan and A. C. Pugh, *Spectral structures of the generalized companion form and applications*, *Systems Control Lett.* **46** (2002), no. 2, 75–84. MR MR2010060 (2004h:93032)
- [VA01] A.I. Vardulakis and E. Antoniou, *Fundamental equivalence of discrete time ar representations*, *Proceedings of the 1st IFAC Symposium on System Structure and Control*, 2001.

- [VA03] A. I. G. Vardulakis and E. Antoniou, *Fundamental equivalence of discrete-time AR representations*, *Internat. J. Control* **76** (2003), no. 11, 1078–1088. MR 1 988 798
- [Var91] A. I. G. Vardulakis, *Linear multivariable control*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1991, Algebraic analysis and synthesis methods. MR 92i:93003
- [VK95] D. Vafiadis and N. Karcanias, *Generalized state-space realizations from matrix fraction descriptions*, *IEEE Trans. Automat. Control* **40** (1995), no. 6, 1134–1137. MR MR1345979 (96c:93034)
- [VK03] S. Vologianidis and N. P. Karampetakis, *Inverses of multivariable polynomial matrices by Discrete Fourier Transforms*, *European Control Conference (ECC'03)* (Cambridge, U.K.), September 2003.
- [VK04] ———, *Inverses of multivariable polynomial matrices by Discrete Fourier Transform*, *Multidimens. Systems Signal Process.* **15** (2004), 341–361.
- [Wan87] Guorong Wang, *A finite algorithm for computing the weighted Moore-Penrose inverse A_{MN}^+* , *Appl. Math. Comput.* **23** (1987), no. 4, 277–289. MR 88i:15012
- [Wil86] J.C. Willems, *From time series to linear systems : Part i. finite dimensional linear time invariant systems.*, *Automatica* **22** (1986), no. 5, 561–580.
- [Wil89] ———, *Models for dynamics*, in : *U. kirchgraber, h.o. walther (eds.), dynamics reported*, vol. 2, Wiley-Teubner, 1989.
- [Wil91] ———, *Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems*, *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-36** (1991), 259–294.
- [Wol74] W. A. Wolovich, *Linear multivariable systems*, Springer-Verlag, New York, 1974, Applied Mathematical Sciences, Vol. 11. MR MR0359881 (50 #12333)

- [ZC83] Shou Yuan Zhang and Chi-Tsong Chen, *Design of unity feedback systems to achieve arbitrary denominator matrix*, IEEE Trans. Automat. Control **28** (1983), no. 4, 518–521. MR MR712784 (85a:93067)
- [ZD63] L. A. Zadeh and C. A. Desoer, *Linear System Theory*, McGraw–Hill Book Co., New York, 1963.

Σύντομο βιογραφικό σημείωμα του Σ. Βολογιαννίδη

Ο Βολογιαννίδης Σταύρος γεννήθηκε στη Θεσσαλονίκη το 1974. Αποφοίτησε από το τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1997 με βαθμό λίαν καλώς. Το 1998 ξεκίνησε την εκπόνηση της διδακτορικής του διατριβής την οποία αποπεράτωσε τον Δεκέμβριο του 2004. Σε αυτό το χρονικό διάστημα, επισκέφτηκε δύο φορές το τμήμα ηλεκτρολόγων μηχανικών της Ακαδημίας της Πράγας, όπου και συνεργάστηκε με τον καθηγητή Sebek στην εύρεση νέων υπολογιστικών μεθόδων για την λύση προβλημάτων αυτομάτου ελέγχου. Η διδακτορική διατριβή του Σ. Βολογιαννίδη οδήγησε στην συγγραφή έξι εργασιών, πέντε εκ των οποίων δημοσιεύτηκαν σε διεθνή περιοδικά και μία είναι ακόμα αυτή τη στιγμή υπό κρίση. Επίσης παρουσιάστηκαν οκτώ εργασίες του σε διεθνή συνέδρια με κριτές.

Το ερευνητικό του ενδιαφέρον περιλαμβάνει την μελέτη των ιδιοτήτων $AR / ARMA$ συστημάτων και της δομής των αντίστοιχων πολυωνυμικών πινάκων, όπως και την μελέτη αριθμητικών και συμβολικών αλγορίθμων για προβλήματα αυτομάτου ελέγχου.

Συμμετείχε σε αρκετά ερευνητικά προγράμματα ως ερευνητής και προγραμματιστής και συνεργάστηκε με αρκετές εταιρίες λογισμικού εντός και εκτός Ελλάδος. Μια από αυτές είναι και η *Wolfram ResearchTM* με την βοήθεια της οποίας αναπτύσσεται ένα πακέτο για ιδιάζοντα συστήματα στην συμβολική γλώσσα *MathematicaTM*.