

ΑΛΓΕΒΡΟ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

Διδακτορική διατριβή

Σταύρος Δ. Βολογιαννίδης

URL: <http://anadrasis.math.auth.gr/S.Vologiannidis.htm>

Email: svol@math.auth.gr

Επιβλέπων καθηγητής: Α.Ι. Βαρδουλάκης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Η/Υ & ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Στόχοι της διατριβής

- Απαντήσεις σε θεωρητικά προβλήματα της πολυωνυμικής θεώρησης του αυτομάτου ελέγχου.
 - Ορισμός μιας νέας ισοδυναμίας μεταξύ κανονικών πολυωνυμικών πινάκων και συστημάτων διακριτού χρόνου που περιγράφονται μέσω αυτών.
 - Ορισμός μιας νέας οικογένειας συνοδευουσών μορφών πολυωνυμικών πινάκων.
- Ανάπτυξη πολυωνυμικών υπολογιστικών μεθόδων για επίλυση προβλημάτων της θεωρίας συστημάτων και ελέγχου
 - Υπολογισμός ελάχιστων πολυωνυμικών βάσεων του πυρήνα πολυωνυμικών πινάκων.
 - Υπολογισμός γενικευμένων αντιστρόφων πολυωνυμικών πινάκων μιας ή περισσότερων μεταβλητών.

Στοιχειώδης ισοδυναμία – Στόχοι – Κίνητρα

Στόχοι

- Ορισμός μιας νέας ισοδυναμίας μεταξύ κανονικών πολυωνυμικών πινάκων, που αφήνει αναλλοίωτη τους στοιχειώδεις διαιρέτες στο $\mathbb{C}[z]$.
- Σύνδεση αυτής της ισοδυναμίας με την συμπεριφορά AR (AutoRegressive) συστημάτων διακριτού χρόνου.

Κίνητρα

- Έχει αποδειχθεί ότι η λύση AR συστημάτων εξαρτάται από τους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.
- Καλύπτει ένα προφανές κενό στην βιβλιογραφία όσον αφορά τις ισοδυναμίες πολυωνυμικών πινάκων.

Στοιχειώδης ισοδυναμία – Εισαγωγικές έννοιες

Ορισμός Κάθε πολυωνυμικός πίνακας $A(s) = A_q s^q + \dots + A_0 \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ είναι **μονομετρικά ισοδύναμος** (unimodular equivalent) με ένα πολυωνυμικό πίνακα της μορφής

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{diag} \left\{ \underbrace{\prod_{j=1}^{v_1} (s - \lambda_j)^{m_{1j}}}_{\varepsilon_1(s)}, \dots, \underbrace{\prod_{j=1}^{v_r} (s - \lambda_j)^{m_{rj}}}_{\varepsilon_r(s)}, 0_{m-r, n-r} \right\} \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$$

όπου $\varepsilon_i(s) = \prod_{j=1}^{v_i} (s - \lambda_j)^{m_{ij}} \in \mathbb{R}[s]$, $i = 1, \dots, r$. Ο πίνακας $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)$ ονομάζεται **Smith μορφή**

του πίνακα $A(s)$ στο \mathbb{C} και τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$ αναλλοίωτα πολυώνυμα του $A(s)$. Τα $\varepsilon_i(s)$ έχουν μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα και την εξής ιδιότητα

$\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s)$, $i = 1, \dots, r-1$. Οι όροι $(s - \lambda_j)^{m_{ij}}$ ονομάζονται **πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες** (finite elementary divisors) του πίνακα $A(s)$.

Ορισμός **Δυικός πίνακας** (dual matrix) ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ βαθμού q είναι ο πίνακας

$$\tilde{A}(s) = s^q A(s^{-1}) = A_0 s^q + \dots + A_q \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}.$$

Ορισμός **Στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο** (infinite elementary divisors) του πολυωνυμικού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times n}$ ονομάζονται οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του δυικού του πίνακα $\tilde{A}(s)$ στο $s = 0$.

Στοιχειώδης ισοδυναμία – Εισαγωγικές έννοιες

Με το σύμβολο $P(m, l)$ θα εννοούμε το σύνολο των $(r + m) \times (r + l)$ πολυωνυμικών πινάκων όπου l και m είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι ή ίσοι με το μηδέν και το r μπορεί να πάρει τιμές από όλους τους ακέραιους που είναι μεγαλύτεροι από το $\max(-m, -l)$.

Ορισμός [A. C. Pugh and A. K. Shelton 1978] Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in P(m, l)$ θα λέγονται **γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι** ή **extended unimodular equivalent** (e.u.e.) αν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $M(s), N(s)$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0$$

και οι σύνθετοι πίνακες

$$\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$$

να έχουν πλήρη τάξη $\forall s \in \mathbb{C}$.

Η γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία συνδέει πίνακες διαφορετικών διαστάσεων και διατηρεί αναλλοίωτους τους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες των πολυωνυμικών πινάκων.

Παράδειγμα γεν. αντ. ισοδυναμίας

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2 \times 2} ; A_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2 \times 2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}_{A_1(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}_{A_2(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s^2 - s^3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{N(s)}$$

σχέση γενικευμένης
αντιστρέψιμης ισοδυναμίας

$$S_{A_2(s)}^{\mathbb{C}}(s) = S_{A_1(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{diag}\{1, s+1\}$$

Ίδιοι στοιχειώδεις διαιρέτες στο \mathbb{C}

$$S_{\tilde{A}_1(s)}^0(s) = \text{diag}\{1, s^3\}$$

Στοιχειώδης διαιρέτης στο $s = \{\infty\}$ τάξης 3

$$S_{\tilde{A}_2(s)}^0(s) = \text{diag}\{1, s^5\}$$

Στοιχειώδης διαιρέτης στο $s = \{\infty\}$ τάξης 5

Παρατήρηση: Οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο δεν αποτελούν αναλλοίωτες της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας.

Στοιχειώδης ισοδυναμία – Εισαγωγικές έννοιες

Ορισμός Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times l}$ θα λέγονται **αυστηρά ισοδύναμοι** (*strict equivalent*) αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι σταθεροί πίνακες $M \in \mathbb{R}^{m \times m}, N \in \mathbb{R}^{l \times l}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\begin{bmatrix} M & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N \end{bmatrix} = 0.$$

Παρατηρήσεις

- Η αυστηρή ισοδυναμία συνδέει πίνακες **ίδιας διάστασης** και αφήνει αναλλοίωτους τους **στοιχειώδεις διαιρέτες στο** $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
- Η γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία συνδέει πίνακες **ανόμοιων διαστάσεων** και αφήνει αναλλοίωτους μόνο τους **στοιχειώδεις διαιρέτες στο** \mathbb{C}

Ορισμός στοιχειώδους ισοδυναμίας

Αριθμός πεπερασμένων
και άπειρων στοιχειωδών
δαιρετών

$$\mathbb{R}_c[s] := \left\{ A(s) = A_q s^q + \dots + A_0 \in \mathbb{R}[s]^{r \times r} \mid r = \text{rank}_{\mathbb{R}[s]}(A(s)), c \in \text{rq}, r \geq 2 \right\}$$

Ορισμός [N. Karampetakis, S. Vologianidis, A.I. Vardulakis, 2004] Οι $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ θα λέγονται **στοιχειωδώς ισοδύναμοι** αν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $M(s), N(s)$ καταλλήλων διαστάσεων, τέτοιοι ώστε να ισχύει η σχέση

$$\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0$$

και οι block πίνακες $\begin{bmatrix} M(s) & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}$ να ικανοποιούν ταυτόχρονα τις παρακάτω

προϋποθέσεις:

- 1) Να έχουν πλήρη τάξη $\forall s \in \mathbb{C}$. (ή ισοδύναμα όχι στοιχειώδεις διαιρέτες στο \mathbb{C}).
- 2) Να μην έχουν στοιχειώδεις διαιρέτες στο $s = \{\infty\}$.

Θεώρημα [N. Karampetakis, S. Vologianidis, A.I. Vardulakis, 2004] Η στοιχειώδης ισοδυναμία αποτελεί σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}_c[s]$.

Θεώρημα [N. Karampetakis, S. Vologianidis, A.I. Vardulakis, 2004] Οι πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}_c[s]$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι (divisor equivalent) αν-ν έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Παράδειγμα στοιχειώδους ισοδυναμίας

$$S_{A_2(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & s^5 \end{bmatrix}$$

$$S_{\tilde{A}_2(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Όχι στοιχειώδεις
διαίρετες στο \mathbb{C}

$$S_{A_1(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^5 \end{bmatrix}$$

$$S_{\tilde{A}_1(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 & 1 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix}}_{A_1(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 & 1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix}}_{A_2(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s^3 & s+1 \\ 0 & -s \end{bmatrix}}_{N(s)}$$

$$S_{[M(s) \ A_2(s)]}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \end{bmatrix}$$

Όχι στοιχειώδεις
διαίρετες στο \mathbb{C}

$$S_{\begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix}}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1(s) := \begin{bmatrix} A_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & s^3 \\ 0 & 1 \\ -s^3 & 0 \\ -1 & -s^2 - s^3 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$M_1(s) := [M(s) \ A_2(s)] = \begin{bmatrix} s+s^2 & 0 & 1 & s^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & s & s^2 \\ 0 & -s^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{M_1(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Όχι στοιχειώδεις
διαίρετες στο $s = \{\infty\}$

$$S_{N_1(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Όχι στοιχειώδεις
διαίρετες στο $s = \{\infty\}$

Άρα οι $A_1(s)$ και $A_2(s)$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμοι

Στοιχειώδης ισοδυναμία – AR συστήματα

Έστω ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων διαφορών οι οποίες υπό μορφή πίνακα γράφονται ως εξής

$$A(\sigma)\beta(k) = 0, k \in [0, N] \quad (1)$$

όπου $A(\sigma) = A_q\sigma^q + A_{q-1}\sigma^{q-1} + \dots + A_0 \in \mathbb{R}[\sigma]^{r \times r}$, σ ο τελεστής μετατόπισης προς τα μπρος δηλαδή $\sigma\beta(k) = \beta(k+1)$, ενώ $\beta(k) : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^r$ είναι μια ακολουθία διανυσμάτων.

Ακολουθώντας την ορολογία του Willems, ονομάζουμε τις εξισώσεις (1) μια αυτοπαλλίνδρομη αναπαράσταση (AutoRegressive representation) της συμπεριφοράς $B_{A(\sigma)}$ (behavior) του συστήματος όπου το $B_{A(\sigma)}$ ορίζεται ως εξής:

$$B_{A(\sigma)} := \{ \beta(k) : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^r : (1) \text{ ικανοποιείται } \forall k \in [0, N] \}.$$

Ορισμός [Vardulakis and Antoniou 2004] Δύο διακριτά αυτοπαλλίνδρομα συστήματα της μορφής

$$A_i(\sigma)\beta_i(k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, N - \deg[A_i(s)] \geq 0$$

όπου το σ είναι ο τελεστής μετατόπισης και $A_i(\sigma) \in \mathbb{R}_c$, $\det[A_i(\sigma)] \neq 0$, $i = 1, 2$ θα λέγονται **θεμελιωδώς ισοδύναμα** ή **fundamentally equivalent** πάνω από το πεπερασμένο διάστημα $k = 0, 1, 2, \dots, N \geq \max\{\deg[A_i(\sigma)]\}$ αν-ν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη πολυωνυμική απεικόνιση ανάμεσα στις αντίστοιχες συμπεριφορές τους $B_{A_1(\sigma)}$, $B_{A_2(\sigma)}$.

Στοιχειώδης ισοδυναμία – AR συστήματα

Θεώρημα [N. Karampetakis, S. Vologianidis, A.I. Vardulakis, 2004] Δύο διακριτά αυτοπαλλίνδρομα συστήματα είναι **θεμελιωδώς ισοδύναμα** αν-ν οι αντίστοιχοι πολυωνυμικοί πίνακες που τα περιγράφουν είναι **στοιχειωδώς ισοδύναμοι**.

Η στοιχειώδης ισοδυναμία αποτελεί το αλγεβρικό κριτήριο για την ισοδυναμία μεταξύ διακριτών αυτοπαλλίνδρομων συστημάτων

Στοιχειώδης ισοδυναμία – AR συστήματα

$$\Sigma_1 : \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 1 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix}}_{A_1(s)} \begin{bmatrix} \xi_{1k}^1 \\ \xi_{2k}^1 \end{bmatrix} = 0_{2 \times 1}, \quad \Sigma_2 : \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}}_{A_2(s)} \begin{bmatrix} \xi_{1k}^2 \\ \xi_{2k}^2 \\ \xi_{3k}^2 \end{bmatrix} = 0_{3 \times 1}$$

$$A_1(s) \stackrel{d.e.}{\sim} A_2(s) \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma_1 \stackrel{f.e.}{\sim} \Sigma_2$$

Αμφιμονοσήμαντες πολυωνυμικές απεικονίσεις ανάμεσα στις συμπεριφορές $\mathcal{B}_{A_1(\sigma)}, \mathcal{B}_{A_2(\sigma)}$.

$$Q_{12}(\sigma) : \xi_k^1 \rightarrow \xi_k^2 \quad \begin{bmatrix} \xi_{1k}^2 \\ \xi_{2k}^2 \\ \xi_{3k}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1k}^1 \\ \xi_{2k}^1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{21}(\sigma) : \xi_k^2 \rightarrow \xi_k^1 \quad \begin{bmatrix} \xi_{1k}^1 \\ \xi_{2k}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1k}^2 \\ \xi_{2k}^2 \\ \xi_{3k}^2 \end{bmatrix}$$

Στοιχειώδης ισοδυναμία – Περαιτέρω έρευνα

- Επέκταση της στοιχειώδους ισοδυναμίας για μη κανονικούς πολυωνυμικούς πίνακες.
- Ορισμός μιας νέας ισοδυναμίας ARMA συστημάτων

$$A(\sigma)\beta(\kappa)=B(\sigma)u(\kappa)$$

μέσω της στοιχειώδους ισοδυναμίας μη κανονικών πολυωνυμικών πινάκων.

Μια νέα οικογένεια συνοδευόντων πινάκων – Στόχοι – Κίνητρα

Στόχοι

- Προτείνεται μια **νέα οικογένεια συνοδεουσών μορφών** για ένα κανονικό πολυωνυμικό πίνακα, οι συντελεστές της οποίας μπορούν να παραμετροποιηθούν ως γινόμενο απλών σταθερών πινάκων.

Κίνητρα

- Η δημοσίευση του Fiedler, 2004, όπου γίνεται αναφορά μόνο σε πολυώνυμα.
- Οι συνοδεύοντες πίνακες πολυωνυμικών πινάκων παίζουν **σημαντικό ρόλο σε πολλά ερευνητικά προβλήματα** διαφόρων κλάδων, είτε σαν θεωρητικό είτε σαν υπολογιστικό εργαλείο (μελέτη των συστημάτων ταλαντώσεων, κλπ).

Μια νέα οικογένεια συνοδεύοντων πινάκων – Εισαγωγικές έννοιες

$T(s) = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \dots + T_n \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$, $\det T(s) \neq 0$ για σχεδόν κάθε $s \in \mathbb{C}$

Ορισμός Πρώτη συνοδεύουσα μορφή του $T(s)$ ονομάζεται ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $P(s) = sP_0 - P_1$, όπου

$$P_0 = \begin{bmatrix} T_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2 & \dots & -T_n \\ I_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

Ορισμός Δεύτερη συνοδεύουσα μορφή του $T(s)$ ονομάζεται ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $\hat{P}(s) = s\hat{P}_0 - \hat{P}_1$, όπου

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} -T_1 & I_p & \dots & 0 \\ -T_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_p \\ -T_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα Η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή είναι στοιχειωδώς ισοδύναμες με τον πολυωνυμικό πίνακα $T(s)$ και άρα έχουν τους ίδιους πεπερασμένους και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Μια νέα οικογένεια συνοδευόντων πινάκων

Ορίζουμε τους πίνακες

$$A_0 = \text{diag}\{T_0, I_{p(n-1)}\}$$
$$A_k = \begin{bmatrix} I_{p(k-1)} & 0 & \cdots \\ 0 & C_k & \ddots \\ \vdots & \ddots & I_{p(n-k-1)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$
$$A_n = \text{diag}\{I_{p(n-1)}, -T_n\}$$

όπου

$$C_k = \begin{bmatrix} -T_k & I_p \\ I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση [Antonίου and Vologianidis 2004] Η πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή του $T(s)$ δίνεται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$P(s) = sA_0 - A_1 A_2 \dots A_n$$

$$\hat{P}(s) = sA_0 - A_n A_{n-1} \dots A_1.$$

Μια νέα οικογένεια συνοδευόντων πινάκων

Θεώρημα [Antoniou and Vologianidis 2004] Έστω ένας κανονικός πολυωνυμικός πίνακας $T(s)$. Τότε για κάθε δυνατή μετάθεση (i_1, i_2, \dots, i_n) της n -άδας $(1, 2, \dots, n)$ ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $Q(s) = sA_0 - A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_n}$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμος με τον $T(s)$.

Πόρισμα [Antoniou and Vologianidis 2004] Έστω ένας κανονικός πολυωνυμικός πίνακας $T(s)$. Για καθένα από τα τέσσερα διατεταγμένα σύνολα δεικτών $I_k = (i_{k,1}, i_{k,2}, \dots, i_{k,n_k})$, $k = 1, 2, 3, 4$ τέτοια ώστε $I_i \cap I_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και $\bigcup_{k=1}^4 I_k = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας $R(s) = sA_{I_1}^{-1}A_0A_{I_2}^{-1} - A_{I_3}A_nA_{I_4}$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμος με τον $T(s)$, όπου $A_{I_k} = A_{i_{k,1}}A_{i_{k,2}}\dots A_{i_{k,n_k}}$ όταν $I_k \neq \emptyset$ και $A_{I_k} = I$ όταν $I_k = \emptyset$.

$$A_k^{-1} = \begin{bmatrix} I_{p(k-1)} & 0 & \dots \\ 0 & C_k^{-1} & \ddots \\ \vdots & \ddots & I_{p(n-k-1)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad C_k^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_p & T_k \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες αυτοί έχουν ίδια δομή πεπερασμένων και απείρων στοιχειωδών διαιρετών με τον αρχικό πίνακα.

ΑΛΓΕΒΡΟ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

Ερμητιανή γραμμικοποίηση ενός ερμητιανού πολ. πίνακα

$$T_i^* = T_i$$

Θεώρημα [Antonίου and Vologianidis 2004] Έστω $T(s)$ ένας Ερμητιανός πολυωνυμικός πίνακας βαθμού n , με $\det T_0 \neq 0$. Τότε η συνοδεύουσα μορφή του $T(s)$

$$R_s(s) = \begin{cases} sA_{odd}^{-1} - A_{even} & \text{για } n \text{ ζυγο} \\ sA_{even}^{-1} - A_{odd} & \text{για } n \text{ περιττο} \end{cases}$$

όπου $A_{even} = A_0^{-1} A_2 A_4 A_6 \dots$, $A_{odd} = A_1 A_3 A_5 \dots$, είναι ένας Ερμητιανός πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας.

$$\text{Για } n = 4 : R_s(s) = s \begin{bmatrix} 0 & I_p & & \\ I_p & T_1 & & \\ & & 0 & I_p \\ & & I_p & T_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_0^{-1} & & & \\ & -T_2 & I_p & \\ & I_p & 0 & \\ & & & -T_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Για } n = 5 : R_s(s) = s \begin{bmatrix} T_0 & & & & \\ & 0 & I_p & & \\ I_p & & T_2 & & \\ & & & 0 & I_p \\ I_p & & & I_p & T_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -T_1 & I_p & & & \\ I_p & 0 & & & \\ & & -T_3 & I_p & \\ & & I_p & 0 & \\ & & & & -T_5 \end{bmatrix}$$

Μια νέα οικογένεια συνοδευόντων πινάκων - Περαιτέρω έρευνα

- Συστηματική μελέτη των μελών αυτής της οικογένειας συνοδευουσών μορφών ως προς τις υπολογιστικές ιδιότητές.
- Χρήση τους στην μελέτη συστημάτων που περιγράφονται από πολυωνυμικούς πίνακες με συμμετρίες.

Σε αυτή την κατεύθυνση κινείται η υπό εξέταση εργασία [Antoniou and Vologianidis, 2005].

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση – Στόχοι – Κίνητρα

Στόχοι

- Παρουσιάζεται ένας καινούριος αλγόριθμος για τον υπολογισμό μιας ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης του αριστερού πυρήνα ενός πολυωνυμικού πίνακα.
- Χρησιμοποιεί ευσταθείς υπολογισμούς σε διαδοχικές Sylvester ή Wolovich απαλείφουσες.

Κίνητρα

- Αποτελεί βασικό μέρος για πολλά προβλήματα ανάλυσης, σύνθεσης και σχεδίασης αυτομάτου ελέγχου όπως
 - το πρόβλημα της επανατοποθέτησης των πόλων ενός συστήματος.
 - και το πρόβλημα της εύρεσης μιας ελάχιστης πραγμάτωσης ενός ρητού πίνακα.

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση – Εισαγωγικές έννοιες

Ορισμός Έστω $F(s) \in \mathbb{R}[s]^{(p+m) \times m}$ με $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} F(s) = m$ και $E(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times (p+m)}$ με $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} E(s) = p$ πολυωνυμικοί πίνακες τέτοιοι ώστε $E(s)F(s) = 0$. Όταν ο $E(s)$ είναι επιπλέον κανονικός κατά γραμμές και δεξιά αντιστρέψιμος, ο $E(s)$ είναι μια **ελάχιστη πολυωνυμική βάση** του διανυσματικού χώρου ρητών συναρτήσεων που παράγει τον αριστερό πυρήνα του $F(s)$ και οι βαθμοί γραμμών $\deg_{r_i} E(s) =: \mu_i, i \in \mathbf{p}$ του $E(s)$ είναι οι αναλλοίωτοι δείκτες γραμμών του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ ή απλούστερα οι **αριστεροί ελάχιστοι δείκτες** του $F(s)$.

$\{1, 2, \dots, p\}$

Ορίζουμε τους πίνακες $S_{a,b}(s) := [I_a, sI_a, \dots, s^{b-1}I_a]^\top \in \mathbb{R}[s]^{ba \times a}$ και $X_k(s) := S_{p+m,k}(s)F(s) \in \mathbb{R}[s]^{(p+m)k \times m}$.

Γενικευμένη απαλείφουσα
του Sylvester (generalized
Sylvester resultant)

$$R_k := \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_0 & F_1 & \dots & F_q & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F_0 & F_1 & \dots & F_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+m)k \times m(q+k)}.$$

$$X_k(s) = R_k S_{m,q+k}(s)$$

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση – Εισαγωγικές έννοιες

$$k_i = \deg_{ci} F(s), i = 1, \dots, m$$

$$X_k(s) = M_{ek} \text{block diag} \{S_{1, k_i+k}(s)\}, \text{ όπου } M_{ek} \in \mathbb{R}^{(m+p)k \times (mk + \sum_{i=1}^m k_i)}$$

γενικευμένη απαλείφουσα του Wolovich
(generalized Wolovich resultant)

Γράφοντας τον πίνακα $F(s)$ σαν $F(s) = [f_1(s), f_2(s), \dots, f_m(s)]$ όπου

$f_i(s) = f_{i0} + sf_{i1} + \dots + s^{k_i} f_{ik_i} \in \mathbb{R}[s]^{(m+p) \times 1}$, $i \in \mathbf{m}$ είναι οι στήλες του $F(s)$, ισχύει

$M_{ek} = [R_k^1, R_k^2, \dots, R_k^m]$ όπου

$$R_k^i = \begin{bmatrix} f_{i0} & f_{i1} & \dots & f_{ik_i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{i0} & f_{i1} & \dots & f_{ik_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{i0} & f_{i1} & \dots & f_{ik_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+p)k \times (k_i+k)}, i \in \mathbf{m}$$

είναι η γενικευμένη Sylvester απαλείφουσα της στήλης $f_i(s)$, $i \in \mathbf{m}$ του $F(s)$.

Θεώρημα Έχει αποδειχθεί ότι οι δύο γενικευμένες απαλείφουσες συνδέονται μέσω της σχέσης

$R_k = [M_{ek}, \mathbf{0}_{(m+p)k, b}] P_k$ όπου $P_k \in \mathbb{R}^{m(q+k) \times m(q+k)}$ είναι ένας πίνακας μετάθεσης.

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση

Θεώρημα [E.N. Antoniou, A.I.G. Vardulakis and S. Vologianidis] Έστω $E(s)$ μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του αριστερού πυρήνα του $F(s)$. Έστω $\mu_i = \deg_{r_i} E(s)$, $i \in \rho$ οι αριστεροί ελάχιστοι δείκτες του $F(s)$ και με a_k ως συμβολίσουμε τον αριθμό των γραμμών του $E(s)$ για τις οποίες ισχύει $\mu_i = \deg_{r_i} E(s) = k$. Τότε

$$\ker^L R_k = \ker^L M_{ek} = \text{Im}^L L_k,$$

όπου το $L_k \in \mathbb{R}^{v_k \times k(p+m)}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\text{block diag}\{S_{1,k-\mu_i}(s)\}_{i:\mu_i < k} E_k(s) = L_k S_{p+m,k}(s),$$

$E_k(s) \in \mathbb{R}^{\sigma_k \times (p+m)}$ είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας που αποτελείται από όλες τις $\sigma_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ τον αριθμό γραμμών του $E(s)$ με βαθμούς στηλών που ικανοποιούν τις σχέσεις $\mu_i = \deg_{r_i} E(s) < k$ και $v_k = \sum_{i:\mu_i < k} (k - \mu_i) = \dim \ker^L M_{ek} = \dim \ker^L R_k$.

Το θεώρημα δείχνει την **σχέση** μεταξύ των συντελεστών μιας ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ και μιας βάσης του αριστερού πυρήνα της γενικευμένης απαλείφουσας του Sylvester ή του Wolovich αντίστοιχα.

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση

Θεώρημα [E.N. Antoniou, A.I.G. Vardulakis and S. Vologianidis] Έστω $E_k(s)$ μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του \mathcal{F}_k . Ορίζω τον πίνακα \bar{L}_{k+1} διαστάσεων

$\sum_{i: \mu_i < k} (k - \mu_i + 1) \times (p + m)(k + 1)$ μέσω της παρακάτω σχέσης

$$\text{block diag}\{S_{1, k-\mu_i+1}(s)\}_{i \in \sigma_k} E_k(s) = \bar{L}_{k+1} S_{p+m, k+1}(s).$$

Έστω $\bar{N}_{k+1} \in \mathbb{R}^{a_k \times (p+m)(k+1)}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $\tilde{L}_{k+1} := [\bar{L}_{k+1}^\top, \bar{N}_{k+1}^\top]^\top$ διαστάσεων $a_k + \sum_{i: \mu_i < k} (k - \mu_i + 1) \times (p + m)(k + 1)$ να ικανοποιεί την

$$\text{rank} \tilde{L}_{k+1} = \sum_{i: \mu_i < k+1} (k - \mu_i + 1) \text{ και } \tilde{L}_{k+1} M_{e(k+1)} = 0$$

δηλαδή ο \tilde{L}_{k+1} να είναι μια βάση του $\ker^L M_{e(k+1)}$. Τότε οι γραμμές του πολυωνυμικού πίνακα

$$\tilde{E}_{k+1}(s) := \begin{bmatrix} E_k(s) \\ N_{k+1}(s) \end{bmatrix}$$

σχηματίζουν μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του \mathcal{F}_{k+1} όπου

$$N_{k+1}(s) := \bar{N}_{k+1} S_{p+m, k+1}(s) \in \mathbb{R}[s]^{a_k \times (p+m)}.$$

Το θεώρημα δείχνει ότι αν είναι γνωστό μέρος της ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης $E(s)$ του αριστερού πυρήνα του $F(s)$ που αντιστοιχεί στις γραμμές με βαθμούς μικρότερους από k , τότε μπορούν να προσδιοριστούν γραμμικά ανεξάρτητα πολυωνυμικά διανύσματα γραμμών με βαθμούς ακριβώς k που να ανήκουν στον αριστερό πυρήνα του $F(s)$

Υπολογισμός ελάχιστη πολυωνυμική βάση - αλγόριθμος

Αλγόριθμος [E.N. Antoniou, A.I.G. Vardulakis and S. Vologianidis] Υπολογισμός ελάχιστης πολυωνυμικής βάσης

- 1) Υπολογίζω μια ορθοκανονική βάση \bar{N}_1 του $\ker^L M_{e1}$ και θέτω $E_1 = \bar{N}_1$.
- 2) Θέτω $k = 2$.
- 3) Χρησιμοποιώντας την σχέση $\text{block diag}\{S_{1,k-\mu_i+1}(s)\}_{i \in \sigma_k} E_k(s) = \bar{L}_{k+1} S_{p+m,k+1}(s)$, υπολογίζω το \bar{L}_k για $E_{k-1}(s) = E_{k-1} S_{p+m,k}$.

4) Υπολογίζω μια ορθοκανονική βάση \bar{N}_k του $\ker^L [M_{ek}, \bar{L}_k^T]$ και θέτω $E_k = \begin{bmatrix} E_{k-1} & | & 0 \\ \hline & & \bar{N}_k \end{bmatrix}$.

- 5) Θέτω $k = k + 1$.
- 6) Αν $\{ \# \text{ γραμμών του } E_{k-1} \} < p$ πηγαίνω στο βήμα 3.
- 7) Η ελάχιστη πολυωνυμική βάση δίνεται από τον πίνακα $E_{k-1} S_{p+m,k-1}(s)$.

SVD: πολυπλοκότητα σε κάθε βήμα

$$O((p+m)^3 k^3)$$

Η SVD που υπολογίστηκε στο βήμα k δεν λαμβάνεται υπόψιν στο επόμενο βήμα

SVD update [M. Gu and S.C Eisenstat]:
πολυπλοκότητα μέχρι το k βήμα

$$O((p+m)^3 k^3)$$

Συνολική πολυπλοκότητα: $O((p+m)^3 \mu^3)$

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση - Παράδειγμα

Σημείωση Ο αλγόριθμος μπορεί να τροποποιηθεί εύκολα έτσι ώστε να υπολογίζει δεξιές ελάχιστες πολυωνυμικές βάσεις, απλά παίρνοντας τον ανάστροφο του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα.

Παράδειγμα Έστω μία συνάρτηση μεταφοράς $P(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$, όπου

$$D_L(s) = (s+2)^2(s+3) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N_L(s) = \begin{bmatrix} 3s+8 & 2s^2+6s+2 \\ s^2+6s+2 & 2s^2+7s+8 \end{bmatrix}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε μια δεξιά παραγοντοποίηση της μορφής $P(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s)$.

Υπολογισμός ελάχιστης βάσης του αριστερού πυρήνα του $F(s) = [D_L(s), -N_L(s)]^T$.

Παρατηρούμε ότι $\|M_{e1}\|_\infty = 36$ και γι' αυτό κανονικοποιούμε τον πίνακα $F(s)$ θέτοντας

$$\bar{F}(s) = F(s) / \|M_{e1}\|_\infty.$$

$$\bar{F}(s) = \begin{bmatrix} 0.028s^3 + 0.194s^2 + 0.444s + 0.333 & 0. \\ 0. & 0.028s^3 + 0.194s^2 + 0.444s + 0.333 \\ -0.0833s - 0.222 & -0.028s^2 - 0.167s - 0.056 \\ -0.056s^2 - 0.167s - 0.056 & -0.083s^2 - 0.194s - 0.222 \end{bmatrix}$$

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση - Παράδειγμα

$k = 1$ Υπολογίζω μια ορθοκανονική βάση \bar{N}_1 του $\ker^L M_{e1}$ και θέτω $E_1 = \bar{N}_1$.

$$M_{e1} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 & 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0. & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 \\ -0.222 & -0.083 & 0 & 0 & -0.056 & -0.167 & -0.028 & 0 \\ -0.056 & -0.167 & -0.056 & 0 & -0.222 & -0.194 & -0.083 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_1 = \emptyset$. \longrightarrow Αριστερός πυρήνας της M_{e1}

$$M_{e2} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 & 0 \\ -0.222 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & -0.056 & -0.167 & -0.0278 & 0 & 0 \\ -0.056 & -0.167 & -0.056 & 0 & 0 & -0.222 & -0.194 & -0.083 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0.444 & 0.194 & 0.028 \\ 0 & -0.222 & -0.083 & 0 & 0 & 0 & -0.056 & -0.167 & -0.028 & 0 \\ 0 & -0.056 & -0.167 & -0.056 & 0 & 0 & -0.222 & -0.194 & -0.083 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_1 = \emptyset \Rightarrow L_1 = \emptyset$. Άρα υπολογίζω $\ker^L[M_{e2}]$

$$\bar{N}_2 = [-0.343 \quad -0.514 \quad -0.343 \quad -0.686 \quad 4.22710^{-16} \quad -2.51610^{-16} \quad -7.47310^{-16} \quad -0.171].$$

Θέτω $E_2 = \bar{N}_2$

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση - Παράδειγμα

$k = 3$

$$M_{e_3} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.44 & 0.19 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.44 & 0.19 & 0.03 & 0 & 0 \\ -0.22 & -0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.06 & -0.17 & -0.03 & 0 & 0 & 0 \\ -0.06 & -0.17 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & -0.22 & -0.19 & -0.08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0.44 & 0.19 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.44 & 0.19 & 0.03 & 0 \\ 0 & -0.22 & -0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.06 & -0.17 & -0.03 & 0 & 0 \\ 0 & -0.06 & -0.17 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & -0.22 & -0.19 & -0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.33 & 0.44 & 0.19 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.44 & 0.19 & 0.03 \\ 0 & 0 & -0.22 & -0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.06 & -0.17 & -0.03 & 0 \\ 0 & 0 & -0.06 & -0.17 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & -0.22 & -0.19 & -0.08 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζω το L_3

$$\bar{L}_3 = \begin{bmatrix} -0.343 & -0.514 & -0.343 & -0.686 & 4.22710^{-16} & -2.51610^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.343 & -0.514 \\ -7.47310^{-16} & -0.171 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.343 & -0.686 & 4.22710^{-16} & -2.51610^{-16} & -7.47310^{-16} & -0.171 \end{bmatrix}$$

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση - Παράδειγμα

$$\bar{N}_3 = \begin{bmatrix} 0.312 & -0.092 & 0.535 & -0.272 & -0.076 & 0.110 \\ 0.595 & -0.332 & -6.46110^{-17} & 1.71710^{-16} & 0.224 & -0.038 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Αριστερός πυρήνας του } [M_{e_3}, \bar{L}_3^T]$$

Θέτω

$$E_3 = \begin{bmatrix} -0.343 & -0.514 & -0.343 & -0.686 & 4.22710^{-16} & -2.51610^{-16} \\ 0.312 & -0.092 & 0.535 & -0.272 & -0.076 & 0.110 \\ -7.47310^{-16} & -0.171 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.595 & -0.332 & -6.46110^{-17} & 1.71710^{-16} & 0.224 & -0.038 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε $p = 2$ γραμμές στον E_3 και άρα σταματάμε την αναδρομή.

Η ανεστραμμένη ελάχιστη πολυωνυμική βάση είναι $E(s) = E_3 S_{4,3}(s)$, με

$$E(s) = [N_R(s) \quad D_R(s)].$$

$$E^T(s) = \begin{bmatrix} 8.902 \times 10^{-17} s - 0.3429 & -2.468 \times 10^{-16} s^2 - 0.07616s + 0.3117 \\ 2.324 \times 10^{-16} s - 0.5144 & -3.185 \times 10^{-16} s^2 + 0.1095s - 0.0918 \\ -7.154 \times 10^{-18} s - 0.3429 & 0.2237s^2 + 0.595s + 0.535487 \\ -0.1714s - 0.6859 & -0.03808s^2 - 0.3321s - 0.271669 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow N_R^T(s) \\ \longrightarrow D_R^T(s) \end{matrix}$$

Ελάχιστη πολυωνυμική βάση – Πλεονεκτήματα – Περαιτέρω έρευνα

Πλεονεκτήματα

- Ο υπολογισμός γίνεται **μόνο με ορθογώνιες αναλύσεις** και οι συντελεστές της ελάχιστης βάσης έχουν το πλεονέκτημα να είναι ορθοκανονικοί.
- Ο αλγόριθμος είναι **αριθμητικά ευσταθής** και βασίζεται σε γνωστές τεχνικές όπως η SVD.
- Ο αλγόριθμος είναι **ταχύτερος** από τους μέχρι στιγμής υπάρχοντες στην βιβλιογραφία όταν $\mu < q$.

Περαιτέρω έρευνα

- Βελτιστοποίηση του αλγορίθμου πάνω σε συγκεκριμένα προβλήματα.

Υπολογισμός γεν. αντιστρώφων – Στόχοι – Κίνητρα

Στόχοι

- Παρουσιάζονται δύο νέοι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του Moore-Penrose και Drazin γεν. αντιστρώφων πολυωνυμικών πινάκων.
- Χρησιμοποιούνται τεχνικές υπολογισμού/παρεμβολής και γρήγορου μετασχηματισμού Fourier.

Κίνητρα

- Οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ και μνήμη για τον υπολογισμό των γενικευμένων αντιστρώφων πολυωνυμικών πινάκων.
- Η συχνή χρήση των γενικευμένων αντιστρώφων σε πολλά προβλήματα αυτομάτου ελέγχου.

Υπολογισμός γεν. αντιστρόφων

$$A(\bar{z}) = A(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1=0}^{M_1} \sum_{k_2=0}^{M_2} \dots \sum_{k_n=0}^{M_n} (A_{k_1 \dots k_n}) (z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n})$$

Ορισμός Για κάθε πίνακα $A(\bar{z}) \in \mathbb{R}[\bar{z}]^{p \times m}$, υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας που θα συμβολίζεται $A(\bar{z})^\dagger \in \mathbb{R}(\bar{z})^{m \times p}$ και που ονομάζεται ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος που ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$A(\bar{z})A(\bar{z})^\dagger A(\bar{z}) = A(\bar{z})$$

$$A(\bar{z})^\dagger A(\bar{z})A(\bar{z})^\dagger = A(\bar{z})^\dagger$$

$$(A(\bar{z})A(\bar{z})^\dagger)^* = A(\bar{z})A(\bar{z})^\dagger$$

$$(A(\bar{z})^\dagger A(\bar{z}))^* = A(\bar{z})^\dagger A(\bar{z})$$

όπου με $A(\bar{z})^*$ συμβολίζεται ο ανάστροφος συζυγής του $A(\bar{z})$. Στην ειδική περίπτωση όπου ο $A(\bar{z})$ είναι τετράγωνος και αντιστρέψιμος, τότε ο γενικευμένος αντίστροφος συμπίπτει με τον συνηθισμένο αντίστροφο.

Υπολογισμός γεν. αντιστρώφων

Θεώρημα [Vologianidis and Karampetakis, 2004] Έστω ο πίνακας $A(\bar{z}) = A(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_n]^{p \times m}$ και

$$\begin{aligned} a(\bar{z}, s) &= \det \left[sI_p - A(\bar{z})A(\bar{z})^\top \right] \\ &= a_0(\bar{z})s^p + a_1(\bar{z})s^{p-1} + \dots + a_{p-1}(\bar{z})s + a_p(\bar{z}) \end{aligned}$$

με $a_0(\bar{z}) = 1$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του γινομένου $A(\bar{z})A(\bar{z})^\top$. Έστω k τέτοιο ώστε $a_p(\bar{z}) \equiv 0, \dots, a_{k+1}(\bar{z}) \equiv 0$ ενώ $a_k(\bar{z}) \neq 0$ και $\Lambda := \{(\bar{z}) \in \mathbb{C}^n : a_k(\bar{z}) = 0\}$. Τότε ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος $A(\bar{z})^\dagger$ του $A(\bar{z})$ για $s \in \bar{z} \in \mathbb{C}^n - \Lambda$ δίνεται από τη σχέση

$$A(\bar{z})^\dagger = -\frac{1}{a_k(\bar{z})} A(\bar{z})^\top B_{k-1}(\bar{z})$$

με

$B_{k-1}(\bar{z}) = a_0(\bar{z}) \left[A(\bar{z})A(\bar{z})^\top \right]^{k-1} + \dots + a_{k-1}(\bar{z})I_p$ αν $k > 0$ ενώ αν $k = 0$ τότε $A(\bar{z})^\dagger = 0$. Αν $\bar{z} \in \Lambda$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ξανά τον ίδιο αλγόριθμο.

Υπολογισμός γεν. αντιστρόφων

Ορισμός Για κάθε τετράγωνο πολυωνυμικό πίνακα $A(\bar{z}) \in \mathbb{R}[\bar{z}]^{m \times m}$, υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας $A(\bar{z})^D \in \mathbb{R}[\bar{z}]^{m \times m}$, που ονομάζεται *Drazin γενικευμένος αντίστροφος* που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$$A(\bar{z})^{k+1} A(\bar{z})^D = A(\bar{z})^k \text{ για } k = \text{ind}(A(\bar{z})) = \min(k \in \mathbb{N} : \text{rank}(A(\bar{z})^k) = \text{rank}(A(\bar{z})^{k+1})),$$

$$A(\bar{z})^D A(\bar{z}) A(\bar{z})^D = A(\bar{z})^D,$$

$$A(\bar{z}) A(\bar{z})^D = A(\bar{z})^D A(\bar{z})$$

Στην ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας $A(\bar{z})$ είναι αντιστρέψιμος, ο *Drazin γενικευμένος αντίστροφος* συμπίπτει με τον κλασσικό αντίστροφο του, δηλαδή $A(\bar{z})^D = A(\bar{z})^{-1}$.

Υπολογισμός γεν. αντιστρώφων

Θεώρημα [Vologianididis and Karampetakis, 2004] Έστω ένας πολυωνυμικός πίνακας $A(\bar{z}) \in \mathbb{R}[\bar{z}]^{m \times m}$ και

$$a(s, z_1, \dots, z_n) = \det[sI_m - A(\bar{z})] = (a_0(\bar{z})s^m + \dots + a_{m-1}(\bar{z})s + a_m(\bar{z}))$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A(\bar{z})$ με $a_0(\bar{z}) \equiv 1, \bar{z} \in \mathbb{C}^n$. Έστω επίσης η παρακάτω ακολουθία από $m \times m$ πολυωνυμικούς πίνακες

$$B_j(\bar{z}) = a_0(\bar{z})A(\bar{z})^j + \dots + a_{j-1}(\bar{z})A(\bar{z}) + a_j(\bar{z})I_m, \quad a_0(\bar{z}) = 1, j = 0, \dots, m$$

Έστω $t \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a_m(\bar{z}) \equiv 0, \dots, a_{t+1}(\bar{z}) \equiv 0, a_t(\bar{z}) \neq 0$, το παρακάτω σύνολο $\Lambda = \{\bar{z}_i \in \mathbb{C}^n : a_t(\bar{z}_i) = 0\}$ και $r \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $B_m(\bar{z}), \dots, B_r(\bar{z}) = 0, B_{r-1}(\bar{z}) \neq 0$.

Ορίζουμε $k = r - t$.

Όταν $\bar{z} \in \mathbb{C}^n - \Lambda$ και $k > 0$, ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος του $A(s)$ δίνεται από τη σχέση

$$A(\bar{z})^D = \frac{A(\bar{z})^k B_{t-1}(\bar{z})^{k+1}}{a_t(\bar{z})^{k+1}}$$

με $B_{t-1}(\bar{z}) = a_0(\bar{z})A(\bar{z})^{t-1} + \dots + a_{t-2}(\bar{z})A(\bar{z}) + a_{t-1}(\bar{z})I_m$.

Όταν $\bar{z} \in \mathbb{C}^n - \Lambda$ και $k = 0$, έχουμε $A(s)^D = 0$. Για τα $\bar{z}_i \in \Lambda$ χρησιμοποιούμε τον ίδιο αλγόριθμο ξανά.

Υπολογισμός γεν. αντιστρόφων - DFT

Ορισμός Έστω δύο πεπερασμένου πλήθους ακολουθίες $X(k_1, \dots, k_n)$ και $\tilde{X}(r_1, \dots, r_n)$, $k_i, r_i = 0, 1, \dots, M_i$. Οι δύο αυτές ακολουθίες αποτελούν ένα DFT ζεύγος αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\tilde{X}(r_1, \dots, r_n) = \sum_{k_1=0}^{M_1} \sum_{k_2=0}^{M_2} \dots \sum_{k_n=0}^{M_n} X(k_1, \dots, k_n) W_1^{-k_1 r_1} \dots W_n^{-k_n r_n}$$

$$X(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{R} \sum_{r_1=0}^{M_1} \sum_{r_2=0}^{M_2} \dots \sum_{r_n=0}^{M_n} \tilde{X}(r_1, \dots, r_n) W_1^{k_1 r_1} \dots W_n^{k_n r_n}$$

όπου $W_i = e^{\frac{2\pi j}{M_i+1}} \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$, $R = \prod_{i=1}^n (M_i + 1)$.

Η πολυπλοκότητα του υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier ενός πολυδιάστατου πίνακα (πολυδιάστατης ακολουθίας) $M \in \mathbb{R}^{m_1 \times \dots \times m_n}$ είναι της τάξης $\mathcal{O}\left(\prod_{i=1}^n m_i^2\right)$.

Με τεχνικές FFT μειώνεται δραματικά σε $\mathcal{O}\left(\left(\prod_{i=1}^n m_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \log m_i\right)\right)$

Αλγόριθμος υπολογισμού/παρεμβολής για πολυωνυμικούς πίνακες

1) Υπολογισμός των τιμών του πολυωνυμικού πίνακα σε ένα σύνολο από

$$R = \prod_{i=1}^n (\deg_{z_i} (f(A(\bar{z}))) + 1) \text{ επιλεγμένων } n\text{-άδων μιγαδικών αριθμών } \bar{z}_i, i = 1, 2, \dots, R.$$

Σε αυτό το βήμα καταλήγουμε με R σταθερούς πίνακες $A(\bar{z}_i), i = 1, 2, \dots, R$.

2) Εφαρμογή της συνάρτησης f στους σταθερούς πίνακες $A(\bar{z}_i), i = 1, 2, \dots, R$.

3) Υπολογισμός των συντελεστών του πολυωνυμικού πίνακα $f(A(\bar{z}))$ με κάποια από τις γνωστές μεθόδους παρεμβολής όπως χρησιμοποιώντας τους πίνακες *Vandermonde*, την μέθοδο *Newton* ή την μέθοδο *Lagrange*.

Σημείωση: Η αποτελεσματικότητα της παραπάνω τεχνικής έγκειται στην επιλογή κατάλληλων μεθόδων σε κάθε από τα παραπάνω βήματα.

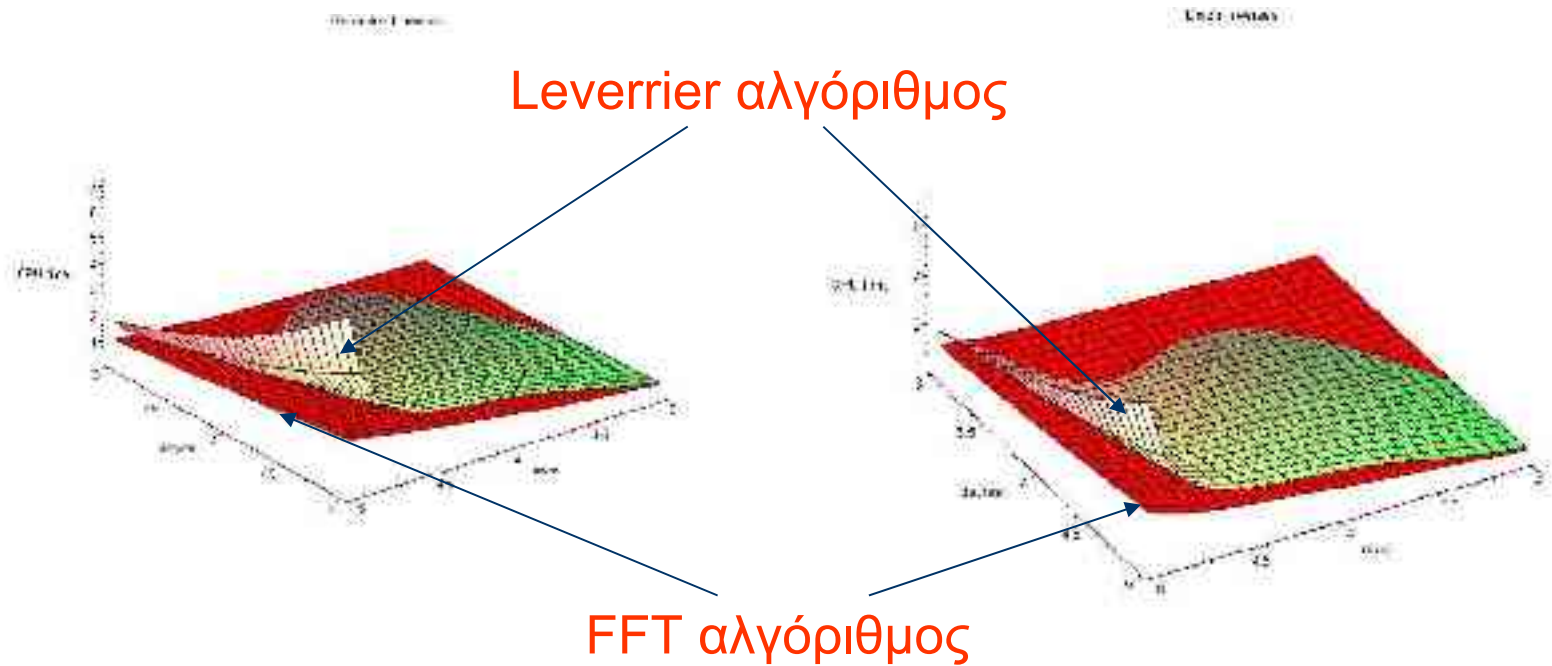
Υπολογισμός γεν. αντιστρόφων

Στα πλαίσια αυτής της διατριβής αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του Moore-Penrose και Drazin γενικευμένων αντιστρόφων συνδυάζοντας:

- Τον αλγόριθμο υπολογισμού/παρεμβολής για πολυωνυμικούς πίνακες
- Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα για τον υπολογισμό των γενικευμένων αντιστρόφων
- Τον γρήγορο μετασχηματισμό Fourier

Απόδοση αλγορίθμων

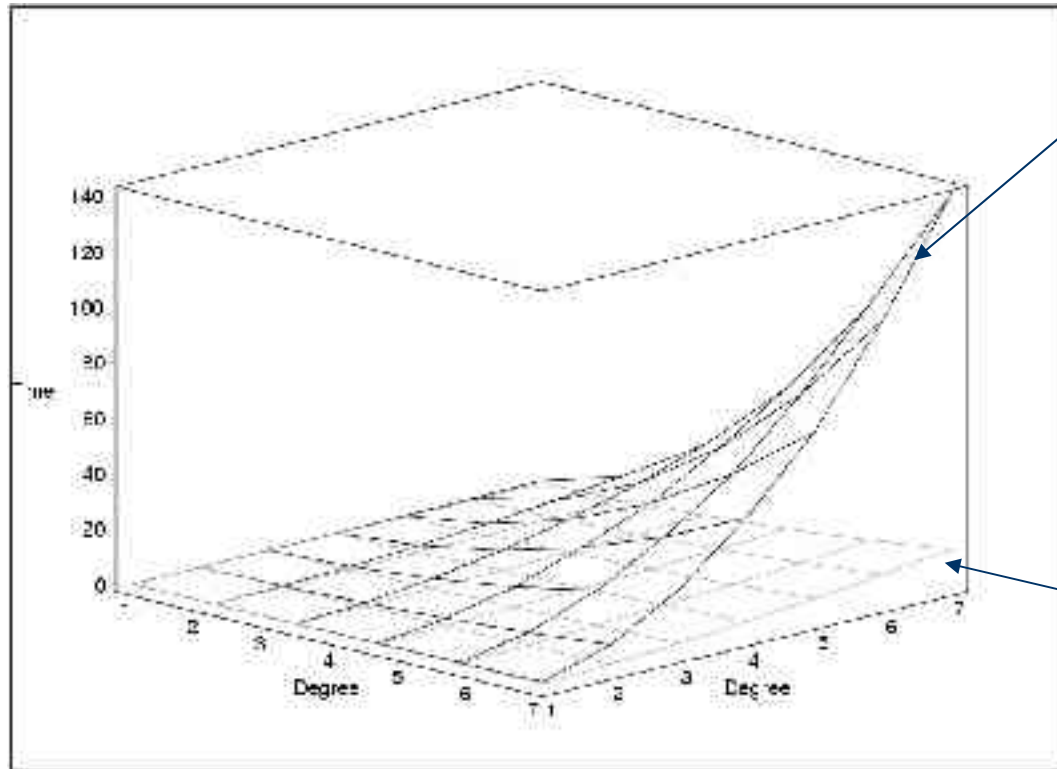
Πολυωνυμικοί πίνακες μιας μεταβλητής



Χρόνος υπολογισμού του Moore-Penrose γεν. αντ. σε συνάρτηση με τον αριθμό των γραμμών και το βαθμό του πίνακα.

Χρόνος υπολογισμού του Drazin γεν. αντ. σε συνάρτηση με τον αριθμό των γραμμών και το βαθμό του πίνακα.

Απόδοση αλγορίθμων



Leverrier αλγόριθμος

FFT αλγόριθμος

Χρόνος υπολογισμού του Moore-Penrose γεν. αντ. ενός πολυωνυμικού πίνακα διαστάσεων 3×4 δύο μεταβλητών, σε συνάρτηση με τους βαθμούς του.

Υπολογισμός γεν. αντιστρόφων – Πλεονεκτήματα – Περαιτέρω έρευνα

Πλεονεκτήματα

- Σημαντικό πλεονέκτημα στην ταχύτητα σχετικά με τους υπάρχοντες αλγόριθμους
- Χρησιμοποιούνται αλγόριθμοι (FFT - IFFT) που είναι ήδη βελτιστοποιημένοι στο μέγιστο σε κάθε υπολογιστική πλατφόρμα και μπορούν να εκμεταλλευθούν την ύπαρξη συστοιχιών Η/Υ παράλληλης επεξεργασίας.

Περαιτέρω έρευνα

- Υπολογισμός του outer inverse που γενικεύει κατηγορίες γενικευμένων αντιστρόφων όπως ο Moore-Penrose, Drazin κλπ
- Ανάπτυξη και υλοποίηση άλλων αλγορίθμων για πολυωνυμικούς πίνακες, βασισμένων σε αντίστοιχες τεχνικές.
- Υλοποίηση αντίστοιχων αλγορίθμων σε πλατφόρμες που υπάρχει εξειδικευμένο υλικό για πράξεις διανυσμάτων – σύγκριση των επιδόσεων.

Συμπεράσματα

- Ορισμός μιας νέας **ισοδυναμίας** μεταξύ κανονικών πολυωνυμικών πινάκων και συστημάτων διακριτού χρόνου που περιγράφονται μέσω αυτών.
- Ορισμός μιας νέας **οικογένειας συνοδευουσών** μορφών πολυωνυμικών πινάκων.
- Αλγόριθμος υπολογισμού **ελάχιστων πολυωνυμικών βάσεων** του πυρήνα πολυωνυμικών πινάκων.
- Αλγόριθμος υπολογισμού **γενικευμένων αντιστρόφων πολυωνυμικών πινάκων** μιας ή περισσότερων μεταβλητών.